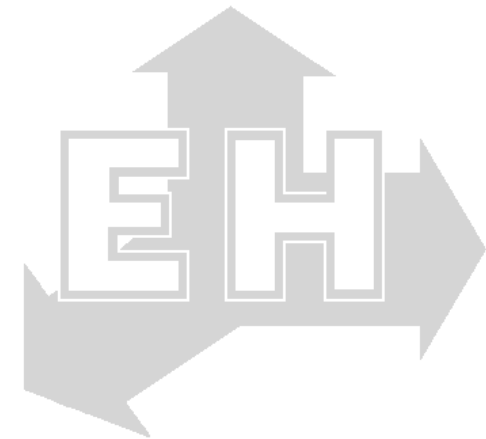


**Здесь и далее мы рассматриваем смесь
двух проводников: плохого
(диэлектрика) и хорошего (металла).**

**Ситуация эквивалентна
квазистатическому приближению при**

$$\sigma_d = -i\omega\epsilon_d$$



Частотная дисперсия материальных параметров

$$\vec{D}(t) = \tilde{\varepsilon} E = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-t') \vec{E}(t') dt' = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau$$

$$\vec{D}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{D}(t) e^{i\omega t} dt \qquad \vec{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} \vec{D}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{D}(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega') e^{-i\omega'(t-\tau)} d\omega' \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{i\omega'\tau} d\tau \right] d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega') \left[\delta(\omega-\omega') \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{i\omega'\tau} d\tau \right] d\omega' = \left[\int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right] \vec{E}(\omega) \\ &= \varepsilon(\omega) E(\omega) \end{aligned}$$

Соотношения Крамерса-Кронига

$$D = \tilde{\varepsilon}E = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-t')E_{ext}(t')dt'$$

$$E = \tilde{\varepsilon}^{-1}D = \int_{-\infty}^t \varepsilon^{-1}(t-t')E_{ext}(t')dt'$$

$$f(\tau) = \begin{cases} \varepsilon(\tau) \\ \varepsilon(\tau)^{-1} \end{cases}$$

$$f_{\omega} = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad \omega = u + iv (v > 0) \quad f_{\omega} = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}e^{-v\tau}d\tau$$

Сходимость интеграла при $v > 0$ означает, что в верхней полуплоскости комплексной переменной ω функция является аналитической. Иными словами здесь нет ни полюсов ни других особых точек. Следуя Коши, представим в виде контурного интеграла

$$f_{\omega} = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{f_{\omega}(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta$$

В качестве контура удобно рассматривать контур, образованный действительной осью и бесконечно-удаленной полуокружностью, лежащей в верхней полуплоскости. Из физических соображений известно, что $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow \infty$, поэтому в качестве функции отклика удобно рассматривать $\varepsilon - 1$. В этом случае интеграл по полуокружности стремится к нулю при стремлении радиуса к бесконечности

$$\left| \int \frac{\varepsilon(\zeta) - 1}{\zeta - \omega} d\xi \right| \leq \left| \max_{0 \leq \vartheta \leq \pi} \varepsilon(\vartheta) - 1 \right| \left| \int_0^\pi \frac{e^{i\vartheta} r d\vartheta}{r e^{i\vartheta} - \omega} \right| = \left| \max_{0 \leq \vartheta \leq \pi} \varepsilon(\vartheta) - 1 \right| \left| \int_0^\pi \frac{e^{i\vartheta} d\vartheta}{e^{i\vartheta} - \omega/r} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left| \max_{0 \leq \vartheta \leq \pi} \varepsilon(\vartheta) - 1 \right| \left| \int_0^\pi d\vartheta \right| = \pi \left| \max_{0 \leq \vartheta \leq \pi} \varepsilon(\vartheta) - 1 \right| \rightarrow 0$$

Для действительных ω подынтегральное выражение имеет особенность в точке $\zeta = \omega$, поэтому мы слегка деформируем контур, обойдя эту особенность по маленькой полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости и имеющей центр в точке $\zeta = \omega$.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\omega) - 1 &= \frac{1}{2i\pi} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\omega - \delta}^{\omega + \delta} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx \right] = \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{\varepsilon(\delta e^{i\vartheta} + \omega) - 1}{\delta e^{i\vartheta}} (-i\delta e^{i\vartheta}) d\vartheta \right] = \\
 &= \frac{1}{2i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx + \frac{i\pi [\varepsilon(\omega) - 1]}{2i\pi}
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\omega) - 1 = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(x) - 1}{x - \omega} dx$$

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx$$

Гипотеза масштабной инвариантности состоит в том, что единственным геометрическим масштабом является корреляционная длина ξ . Это обеспечивает универсальность критических индексов, а именно их независимость от микрокорреляций, определяющих лишь величину порога протекания.

Более того эта гипотеза предполагает, что зависимость физических величин от концентрации

$$\tau = (p - p_c) / p_c$$

проявляется только если размер L системы больше корреляционной длины ξ , и что эта зависимость проявляется исключительно через зависимость корреляционной длины от концентрации: $\xi_\varepsilon \propto |\tau|^{-\nu}$.

Иными словами, если все геометрические масштабы измерять в единицах корреляционной длины, то системы с разными концентрациями выглядят одинаково.

Если $L < \xi$, то все величины зависят не от ξ , от L .
 Размер L системы играет роль корреляционной длины.
 Разбивая бесконечную систему на ячейки размера L ,
 удобно ввести понятие ячейечной проводимости

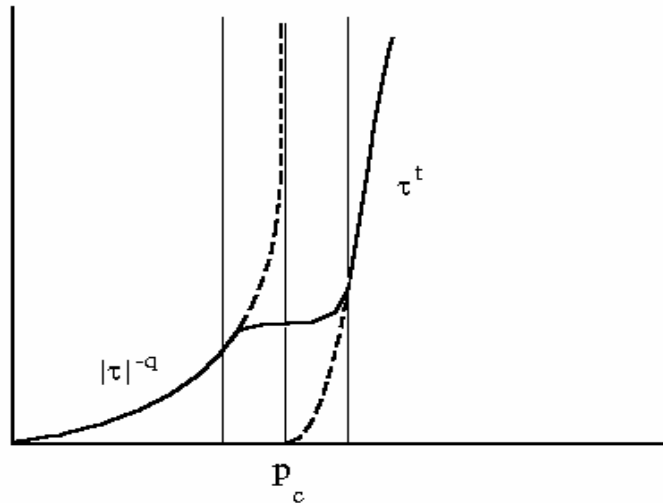
$$\sigma_{cel}(L) = \begin{cases} \sigma_{mcel}(L) \sim \sigma_m L^{-\Delta_m} & \text{через ячейку есть канал} \\ \sigma_{dcel}(L) \sim \sigma_d L^{\Delta_d} & \text{через ячейку нет канала} \end{cases}$$

Для $\tau > 0$ вероятность наличия в ячейке канала растет как

$$\tau_{cel} \propto \tau L^{\Delta_\tau} \quad \Delta_\tau = 1/\nu.$$

Ячеечное значение «магнитного поля» $h = \sigma_d / \sigma_m$ равно

$$h_{cel} = \frac{\sigma_{dcel}}{\sigma_{mcel}} \propto h L^{\Delta_d + \Delta_m}$$



Поведение проводимости при конечных L и h качественно представлено на рисунке. Пунктир соответствует случаю $L = \infty, h = 0$.

Из определения ячейочной проводимости следует, что существует масштаб, на котором проводимость по каналу протекания сравнивается с проводимостью по окружающему пространству $\sigma_{dcel} \propto \sigma_d L_*^{\Delta_d} = \sigma_{mcel} \propto \sigma_m L_*^{-\Delta_m}$. Как следствие дальнейшее приближение к порогу протекания слабо сказывается на величине проводимости. Иными словами флуктуации больших размеров не сказываются на значения физических величин. Данный масштаб можно рассматривать как корреляционную длину при конечном h : $\xi_h = L_* \propto h^{-\Delta_h}$. Для конечного отношения h проводимостей корреляционная длина должна вводиться как $\xi = \min(\xi_\tau, \xi_h)$

Гипотеза скейлинга предполагает, что при $L = \infty$ все величины зависят от свойств системы только через корреляционную длину.

$$\sigma_{eff}(\tau, h) = \sigma_{eff}(\xi) = \begin{cases} \sigma_{eff}(\xi_\tau) & \xi_\tau < \xi_h \\ \sigma_{eff}(\xi_h) & \xi_\tau > \xi_h \end{cases}$$

Для $h = 0$ ячейки с каналами соответствуют случаю $p > p_c$, что дает для смеси металл-диэлектрик

$$\sigma_{eff}(\tau > 0) = \sigma_{eff}(\xi) \propto \sigma_m \xi^{-\Delta_m} \propto \sigma_m \tau^{\Delta_m \nu}$$

$$\Delta_m = t / \nu.$$

Ячейки без канала в этом случае соответствуют $p < p_c$ и описывают смесь сверхпроводник-металл

$$\sigma_{eff}(\tau < 0) = \sigma_{eff}(\xi) \propto \sigma_d \xi^{\Delta_d} \propto \sigma_d \tau^{-\Delta_d \nu}.$$

$$\Delta_d = q / \nu$$

Для конечной величины h при $\tau_{cr} \approx h^{1/(t+q)}$ наблюдается кроссовер (переход от поведения металл-диэлектрик к поведению металл-сверхпроводник). Это условие следует из равенства $\sigma_m \tau_{cr}^t \approx \sigma_d \tau_{cr}^{-q}$. В кроссоверной области

$$h_{cel} = \frac{\sigma_{dcel}}{\sigma_{mcel}} \propto hL^{\Delta_d + \Delta_m} = hL^{1/\Delta_h}$$

$$\xi_h \sim h^{-\Delta_h}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{eff} (|\tau| < \tau_{cr}) &= \sigma_{deff}(\xi_h) \propto \sigma_d \xi_h^{\Delta_d} \propto \sigma_d h^{-\Delta_d \Delta_h} = \sigma_d h^{-s} = \\ &= \sigma_{meff}(\xi_h) = \sigma_m \xi_h^{-\Delta_m} \propto \sigma_m h^{\Delta_m \Delta_h} = \sigma_m h^{1-s}, \end{aligned}$$

$$s = \Delta_d \Delta_h = 1 - \Delta_m \Delta_h \qquad \Delta_h = \frac{1}{(\Delta_d + \Delta_m)}$$

Вспоминая, что $\Delta_d = q/\nu$ $\Delta_m = t/\nu$. получаем $\Delta_h = \frac{\nu}{(q+t)}$

$$s = t/(q+t)$$

Гипотеза скейлинга означает, что все величины являются однородными функциями от переменных. Т.е. при изменении единицы измерения длины все меняется степенным образом.

В частности для проводимости мы имеем:

$$\sigma_{eff} = \sigma_{mcel} \varphi(\tau_{cel}, h_{cel}) = \sigma_m L^{-t/v} \varphi(\tau L^{\Delta_\tau}, h L^{(t+q)/v})$$

Выбирая $L = h^{-v/(t+q)} = \tau_{cr}^{-v}$ ($\tau_{cr} \approx h^{1/(t+q)}$) получим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m} &= h^{t/(t+q)} \varphi\left(\tau / h^{(v\Delta_\tau)/(t+q)}\right) = h^{t/(t+q)} \varphi\left(\tau / \tau_{cr}^{(v\Delta_\tau)}\right) \\ &= h^{t/(t+q)} \varphi\left(\left[\frac{\xi_h}{\xi_\tau}\right]^v\right) = h^S \varphi(x) \end{aligned}$$

$$x = \left(\tau / h^{1/(t+q)} \right) = \frac{\tau}{\tau_{cr}} = \left[\frac{\xi_h}{\xi_\tau} \right]^v$$

Точка $x = \infty$ ($h=0$) является особой точкой, так как асимптотики различны по разным направлениям

$$\varphi(x) \sim \begin{cases} x^t & (\tau > 0, h \rightarrow 0) \Rightarrow x \rightarrow +\infty \\ (-x)^{-q} & (\tau < 0, h \rightarrow 0) \Rightarrow x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

что вытекает из поведения проводимости в критической области

$$\sigma_{eff}(\tau, h) \sim \begin{cases} \tau^t = h^{t/(t+q)} \left(\tau / h^{1/(t+q)} \right)^t & \tau > 0, h \rightarrow 0 \\ h\tau^{-q} = h^{t/(t+q)} \left(\tau / h^{1/(t+q)} \right)^{-q} & \tau < 0, h \rightarrow 0 \end{cases}$$

Особый характер поведения $\varphi(x)$ в точке $x = 0$ не так очевиден, так как эта точка соответствует случаю порога протекания при конечном h , где $\sigma_{eff} / \sigma_m \sim h^S$, и ничто не указывает на особенности в поведении проводимости.

$$\varphi(0) \sim 1 + Ax + Bx^2 + \dots$$

Оказывается, что коэффициенты разложения зависят от знака τ . Рассмотрим поведение $\sigma_{eff}(z)$ на комплексной плоскости.

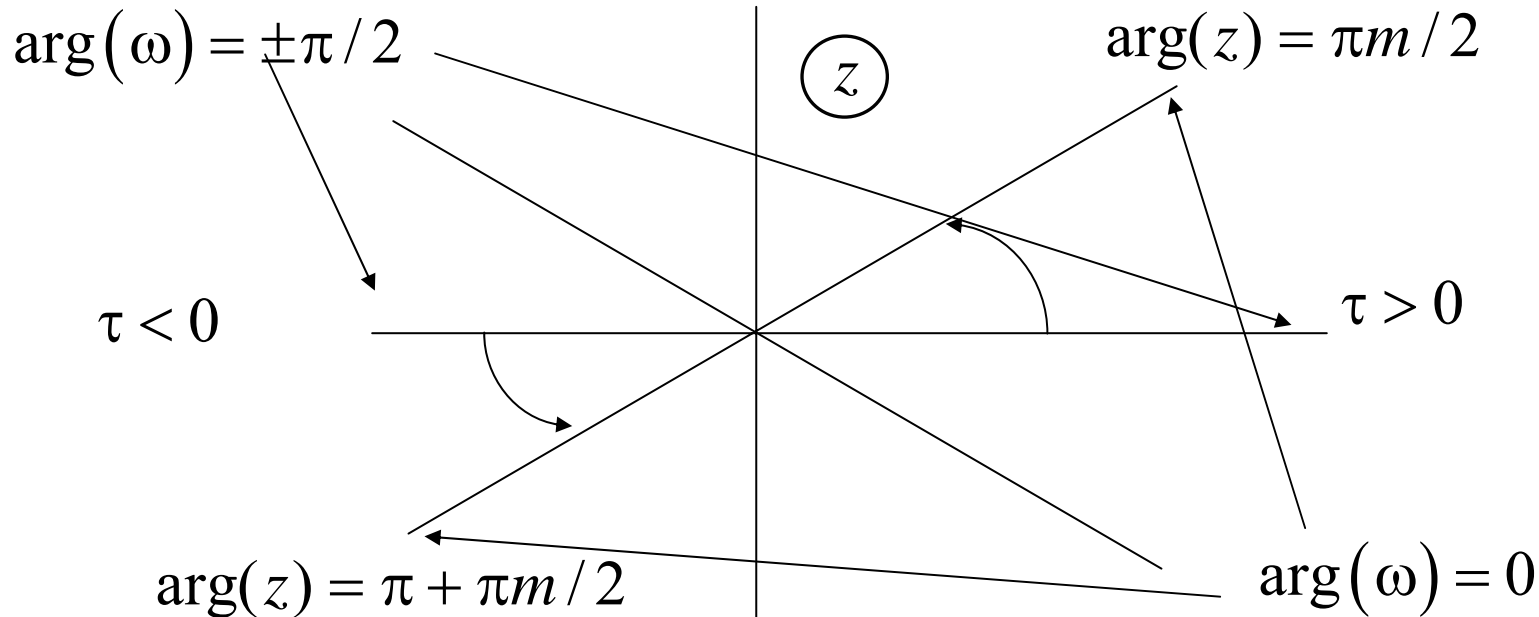
$$\sigma_d = -i\omega\varepsilon / (4\pi) \quad h = \frac{-i\omega\varepsilon / (4\pi)}{\sigma_m} = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma_m} |\omega| e^{i(\arg(\omega) - \pi/2)}$$

$$z = \left(\tau / h^{1/(t+q)} \right) = \left(\tau / h^m \right) = \tau(\omega) \exp \left[-im(\arg(\omega) - \pi/2) \right]$$

$$x = \left(\tau / h^{1/(t+q)} \right) = \frac{\tau}{\tau_{cr}} = \left[\frac{\xi_h}{\xi_\tau} \right]^v \quad m = \frac{s}{t} = \frac{1}{(t+q)} < 1$$

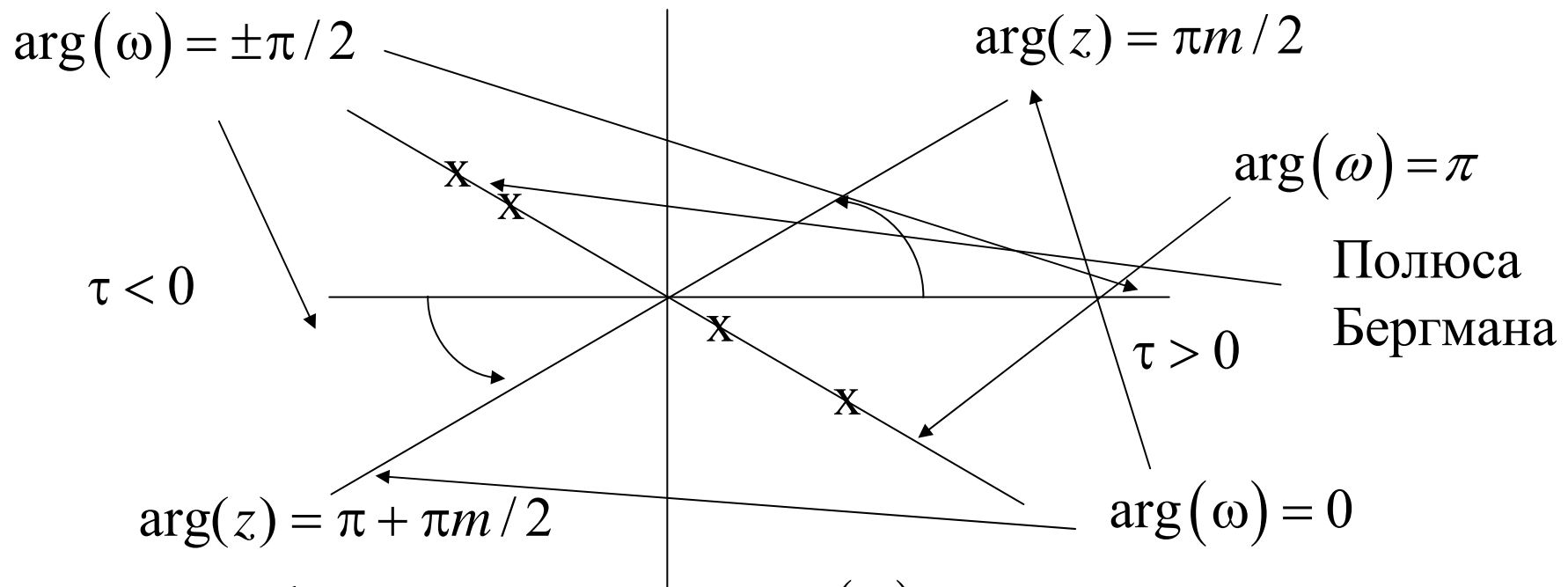
Лучи $\arg(\omega) = \pm\pi/2$ соответствуют действительным значениям z . Т.е. смеси плохой-хороший проводник.

$z > 0$ соответствует $\tau > 0$, а $z < 0$ $\tau < 0$



Чтобы получить значения проводимости для действительных частот мы должны аналитически продолжить $\varphi(z)$ с лучей, соответствующих действительным h ($\arg(\omega) = \pm\pi/2$), на лучи $\arg(\omega) = 0, \pi$. При этом должна быть исключена возможность аналитического продолжения с положительной на отрицательную полуось так как поведение на $x = \infty$ разное.

$$z = (\tau / h^m) = \tau(\omega) \exp[-im(\arg(\omega) - \pi/2)]$$



Как всякая функция отклика, $\sigma_{eff}(\omega)$ является аналитической в верхней полуплоскости ω , подчиняясь соотношениям Крамерса-Кронига. Следовательно $\varphi(z)$ аналитична в областях

$$-\pi m / 2 < \arg(z) < \pi m / 2 \quad \tau > 0$$

$$\pi - \pi m / 2 < \arg(z) < \pi + \pi m / 2 \quad \tau < 0$$

Так как $m < 1$, то эти области касаются только в точке $x=0$, которая не является точкой аналитичности.

Большой интерес представляют также следующие члены разложения по $z = (\tau / h^m)$

$$z \rightarrow \infty \quad \varphi(z) \sim \begin{cases} z^t (1 + A_+ z^{-\alpha_+}) & \tau > 0, z \rightarrow \infty \\ z^{-q} (1 + A_- z^{-\alpha_-}) & \tau < 0, z \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\varphi(z) \sim z^t (1 + A_+ z^{-\alpha_+}) \quad \tau > 0, z \rightarrow \infty$$

$$\sigma_{eff}(\tau, h) = h^s \varphi(z) \sim h^s (\tau / h^m)^t (1 + A (\tau / h^m)^{-\alpha}) = \tau^t + Ah^{m\alpha} \tau^{t-\alpha}$$

Известно, что выше порога протекания на низких частотах младшая по частоте поправка к проводимости чисто мнимая, пропорциональна частоте $m\alpha_+ = 1$ и описывает емкость (диэлектрическую проницаемость) системы.

$$\alpha_+ = 1/m = t + q \quad \sigma_{eff}(\tau, h) = \tau^t + Ah\tau^{-q}$$

Ниже порога протекания

$$\varphi(z) \sim z^{-q} \left(1 + A_- z^{-\alpha_-}\right) \quad \tau < 0, z \rightarrow \infty$$

$$z = \left(\tau / h^m\right) \quad s = t / (q + t)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{eff}(\tau, h) &= h^s \varphi(z) \sim h^s \left(\tau / h^m\right)^{-q} \left(1 + A_- \left(\tau / h^m\right)^{-\alpha_-}\right) = \\ &= h\tau^{-q} + Ah^{1+m\alpha_-} \tau^{-q-\alpha} \end{aligned}$$

Ниже порога протекания поправка описывает диссипацию энергии в конечных кластерах. До тех пор пока можно пренебречь скин-эффектом ток через включение равен

$$j = \sigma \left(E_0 - \frac{4\pi}{3} P \right) \quad P = \frac{1}{(4\pi/3)} \frac{1}{(1 - i\omega\tau_{\text{maxwell}})} E_0$$

$$\begin{aligned} Q = jE^* &= \sigma \left(E_0 - \frac{1}{(1 - i\omega\tau_{\text{maxwell}})} E_0 \right) \left(E_0 - \frac{1}{(1 + i\omega\tau_{\text{maxwell}})} E_0 \right) = \\ &= \sigma \left(-\frac{i\omega\tau_{\text{maxwell}}}{(1 - i\omega\tau_{\text{maxwell}})} \right) \left(\frac{i\omega\tau_{\text{maxwell}}}{(1 + i\omega\tau_{\text{maxwell}})} \right) E_0^2 = \sigma \left(\frac{(\omega\tau)^2}{(1 + (\omega\tau)^2)} \right) E_0^2 = \sigma_{\text{eff}} E_0^2 \end{aligned}$$

Иными словами поправка к проводимости пропорциональна ω^2

$$1 + m\alpha_- = 2 \quad \alpha_- = 1/m = 1(t + q)$$

$$\varphi(z) \sim \left\{ \begin{array}{ll} z^t \left(1 + A_+ z^{-(t+q)} \right) & \tau > 0, z \rightarrow \infty \\ z^{-q} \left(1 + A_- z^{-(t+q)} \right) & \tau < 0, z \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

$$\sigma_{eff} = \sigma_{mcel} \varphi(\tau_{cel}, h_{cel}) = \sigma_m L^{-t/v} \varphi(\tau L^{\Delta_\tau}, h L^{(t+q)/v})$$

Выбирая $L = \tau^{-v}$ мы приходим к иной форме уравнения

состояния $y = 1/x^{(t+q)} = h/\tau^{(t+q)} \quad x = \tau/h^{s/t}$

$$\frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m} = \tau^t \psi\left(h/\tau^{(t+q)}\right) = h^S \frac{\tau^t}{h^S} \psi(y) = h^S x^t \psi(y) = h^S \varphi(x) = \tau^t f(x)$$

$$f(x) = \psi(y(x)) \quad x^t \psi(y) = \varphi(x) \quad f(x) = x^{-t} \varphi(x)$$

Все вышеуказанные трудности связаны с наличием нецелых степеней. Ситуацию можно улучшить, если выбрать новые переменные, связанные со старыми нелинейным образом, таким образом, что неаналитичность вошла бы в формулы преобразования, а связь между новыми переменными (уравнение состояния) имела бы аналитический вид.

На роль τ выбираем

$$x = \tau / h^{s/t} \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m} = \tau^t f(x)$$

$$\chi(\tau, h) = \frac{\partial}{\partial h} \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m} = \tau^t f'(x) \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\tau}{h^m} \right) = -\frac{x^{1+t+q} \tau^{-q}}{t+q} f'(x)$$

новая проводимость имеет вид

$$u(x) = \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m} \chi^{t/q} = \left[\frac{-1}{t+q} \right]^{t/q} x^{t(t+q+1)/q} f(x) [f'(x)]^{t/q}$$

Новое поле

$$v(x) = h \chi^{(t+q)/q} = \left[\frac{-1}{t+q} \right]^{(t+q)/q} x^{(t+q)(t+1)/q} [f'(x)]^{(t+q)/q}$$

Эти соотношения параметрически определяют зависимость $v(u)$. Заметим, что так как χ в отличие от τ знак не меняет, то каждому значению v соответствует два значения u .

Уравнение для «изотермы»

$$\tau^q \chi(\tau, h) = \tau^q \frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial h \sigma_m} = - \frac{x^{1+t+q}}{t+q} f'(x)$$

$$\tau^q \frac{\partial (\sigma_{eff} / \sigma_m)}{\partial h} = \tau^q \frac{\tau^t d(u \tilde{\chi}^{-t/q}(x))}{\tau^{(t+q)} d(v(u) \tilde{\chi}^{-(t+q)/q}(x))} = \frac{du}{d(v(u) \tilde{\chi}^{-(t+q)/q}(x))} = \tilde{\chi}(x)$$

Позволяет свести задачу к решению обыкновенного дифф. уравнения, если выразить $\tilde{\chi}(x)$ через u . Для того, чтобы продвинуться далее рассмотрим асимптотики функций u и v .

$$x \rightarrow -\infty \quad \sigma_{eff}(\tau, h) \sim h\tau^{-q} \quad \chi \sim \partial \sigma_{eff}(\tau, h) / \partial h \sim \tau^{-q}$$

$$u(x) = \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m} \chi^{t/q} \sim h\tau^{-q} \tau^{-t} = x^{-(t+q)} \rightarrow 0$$

$$v(x) = h\chi^{(t+q)/q} \sim h\tau^{-(t+q)} = x^{-(t+q)} \rightarrow 0$$

$$v = u + o(u) \quad u \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty \quad \sigma_{eff}(\tau, h) = \tau^t \left(1 + Ah\tau^{-q-t}\right) \quad \chi = A\tau^{-q}$$

$$u(x) = \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m} \chi^{t/q} \sim \tau^t \left(1 + Ah\tau^{-q-t}\right) A^{t/q} \tau^{-t} = A^{t/q} \left(1 + Ax^{-(q+t)}\right) \rightarrow A^{t/q} = u^*$$

$$v(x) = h\chi^{(t+q)/q} \sim hA^{(t+q)/q} \tau^{-(t+q)} = A^{(t+q)/q} x^{-(t+q)} \rightarrow 0$$

$$u(x) = A^{t/q} \left(1 + Ax^{-(q+t)}\right) = u^* + A^{(t+q)/q} x^{-(q+t)} = u^* + v \quad v = u - u^*$$

Таким образом функция определена на конечном интервале $[0, u^*]$ причем, как было ранее отмечено, каждому значению v соответствует два значения u . Принимая во внимание, что для $h > 0$ функция $v(x) = h\chi^{(t+q)/q}$ тоже положительна, можно сделать однозначный вывод о том, что $v(u)$ имеет один максимум. Очевидно, что эту функцию можно приблизить рядом

$$v(u) = u - \sum g_i u^{\alpha_i}, \alpha_i > 0$$

$$x \rightarrow \infty \quad v = u - u^*$$

$$v(u) = u - gu^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad g = (u^*)^{1/(\alpha-1)} > 0$$

Величину α можно найти, рассмотрев асимптотическое поведение функций u и v при $x=0$

$$x \rightarrow 0 \quad f(x) = x^{-t} \varphi(x) \sim \varphi_0 x^{-t}$$

$$u(x) = \left[\frac{-1}{t+q} \right]^{t/q} x^{t(t+q+1)/q} f(x) [f'(x)]^{t/q} \sim$$

$$\sim \left[\frac{t}{t+q} \right]^{t/q} (-t) \varphi_0^{(t+q)/q} x^{t(t+q+1)/q} x^{-t} x^{-(t+1)t/q} = \left[\frac{t}{t+q} \right]^{t/q} \varphi_0^{(t+q)/q}$$

$$v(x) = h\chi^{(t+q)/q} = \left[\frac{-1}{t+q} \right]^{(t+q)/q} x^{(t+q)(t+1)/q} [f'(x)]^{(t+q)/q} \sim$$

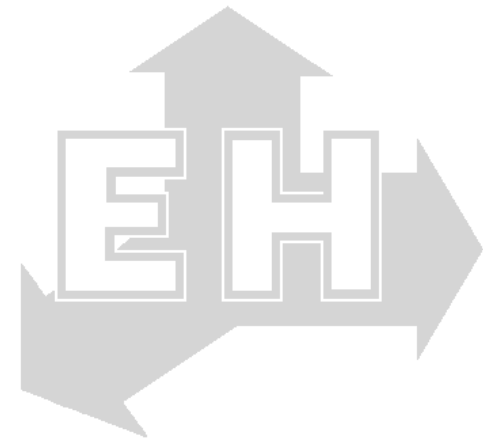
$$\sim \left[\frac{t}{t+q} \right]^{(t+q)/q} \varphi_0^{(t+q)/q}$$

$$v(u) = u - gu^\alpha$$

$$\frac{v(0)}{u(0)} = \frac{t}{t+q} = \frac{u - gu^\alpha}{u} = 1 - gu^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{t+q}{t+q-1}$$

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{x=0} = 1 - \alpha gu_0^{\alpha-1} = \frac{t-1}{t+q-1}$$



$$v(u) = u - gu^\alpha$$

$$\frac{\frac{d\left(u\tilde{\chi}^{-t/q}(x)\right)}{du}}{\frac{d\left(v(u)\tilde{\chi}^{-(t+q)/q}(x)\right)}{du}} = \tilde{\chi}(x)$$

$$\left[\tilde{\chi}^{-t/q} - \frac{t}{q} u \tilde{\chi}^{-(t+q)/q} \frac{d(\tilde{\chi})}{du} \right] = \tilde{\chi}(u)$$

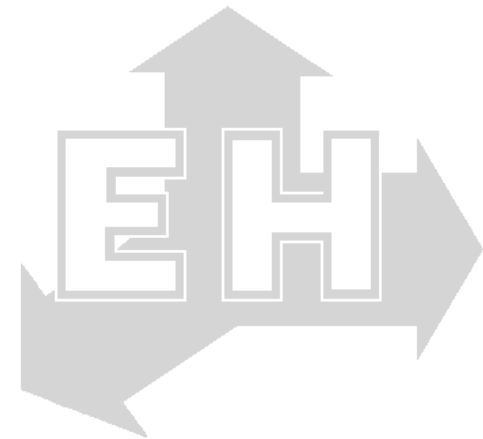
$$\left[\tilde{\chi}^{-(t+q)/q} \left(1 - g \frac{t+q}{t+q-1} u^{1/(t+q-1)} \right) - \frac{t+q}{q} \tilde{\chi}^{-(t+2q)/q} \left(u - gu^{(t+q)/(t+q-1)} \right) \frac{d(\tilde{\chi}(u))}{du} \right]$$

$$y = u^{1/(t+q-1)}$$

$$d(\ln \tilde{\chi}) = -\frac{q \frac{(t+q)}{(t+q-1)} (t+q-1)}{(t+q)} \frac{d \left[\frac{(t+q)}{q} gy \right]}{1 - \left[\frac{(t+q)}{q} gy \right]}$$

$$\ln(\tilde{\chi} / c) = q \int \frac{d \left[\frac{(t+q)}{q} gy - 1 \right]}{\left[\frac{(t+q)}{q} gy - 1 \right]} = q \ln \left[\frac{(t+q)}{q} gy - 1 \right]$$

$$\chi = c \tau^{-q} \left[-1 + \left(\frac{t+q}{q} \right) g u^{1/(t+q-1)} \right]^q$$



Вводя новые переменные $\vartheta = gu^{1/(t+q-1)}$ $r = (\chi/c)^{-1/q}$

$$\tau = r[\vartheta(t+q)/q - 1]$$

$$h = Ar^{(t+q)}\vartheta^{t+q-1}(1-\vartheta)$$

$$\sigma_{eff} / \sigma_m = Br^t \vartheta^{t+q-1}$$

$$\tilde{\sigma}_{eff} = \sigma_{eff} - i \frac{\omega \varepsilon_{eff}}{4\pi} = \sigma_m \tau^t f\left(\frac{\tau}{h^{1/(t+q)}}\right) \quad h = \frac{\tilde{\sigma}_i}{\sigma_m} = -\frac{i\omega \varepsilon_i}{4\pi\sigma_m}, \quad \tilde{\sigma}_i = -\frac{i\omega \varepsilon_i}{4\pi}$$

$$h + a \left(\frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m}\right) \tau = b \left(\frac{\sigma_{eff}}{\sigma_m}\right)^{(t+1)/t}$$

В трехмерном случае $t=2$, уравнение сводится к кубическому.