Лекция 1

1. **Понятие эффективной диэлектрической проницаемости.**
2. **Отклик шарообразного включение на однородное статическое поле**
3. **Приближенные методы расчеты эффективных параметров**

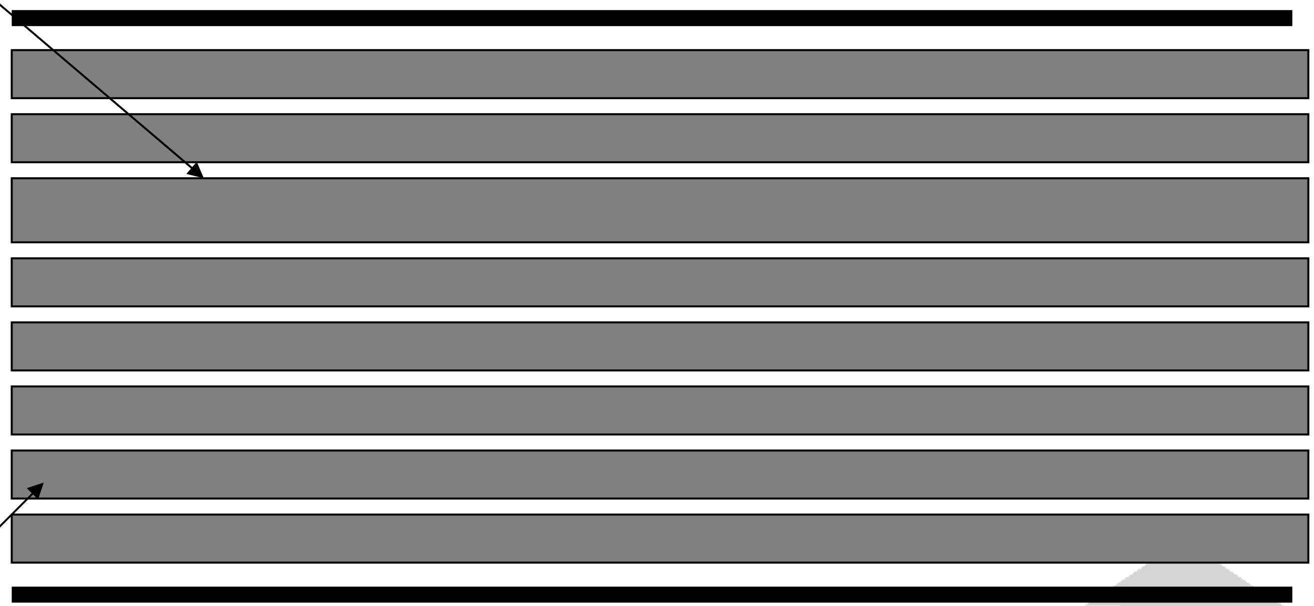
   А. Случай малых концентраций, формула Максвелла, газовое приближение

   Б. Случай малых отклонений диэлектрической проницаемости от среднего значения
4. **Локальное поле в дискретной системе. Формулы Лорентц-Лоренца, Гарнетта**

Рассмотрим плоский конденсатор. Эксперимент показывает, что если внутрь конденсатора поместить незаряженную пластину из какого либо материала, скажем из стекла, то емкость конденсатора увеличивается. Иными словами, при фиксированном заряде конденсатора падает разность потенциалов между пластинами. Это означает, что среднее поле внутри конденсатора должно уменьшиться. Такое уменьшение очевидно, если в качестве материала взять проводник. Так как поле внутри проводника равно нулю, а вне него осталось неизменным, интеграл вдоль пути, соединяющего пластины, уменьшится. Отсюда получается простейшая модель диэлектрика: внутри материала имеется множество тонких проводящих слоев.

$$C = Q/U = Q/(4\pi Q\left(d - d_m\right)/S) \sim S/\left(d - d_m\right)$$

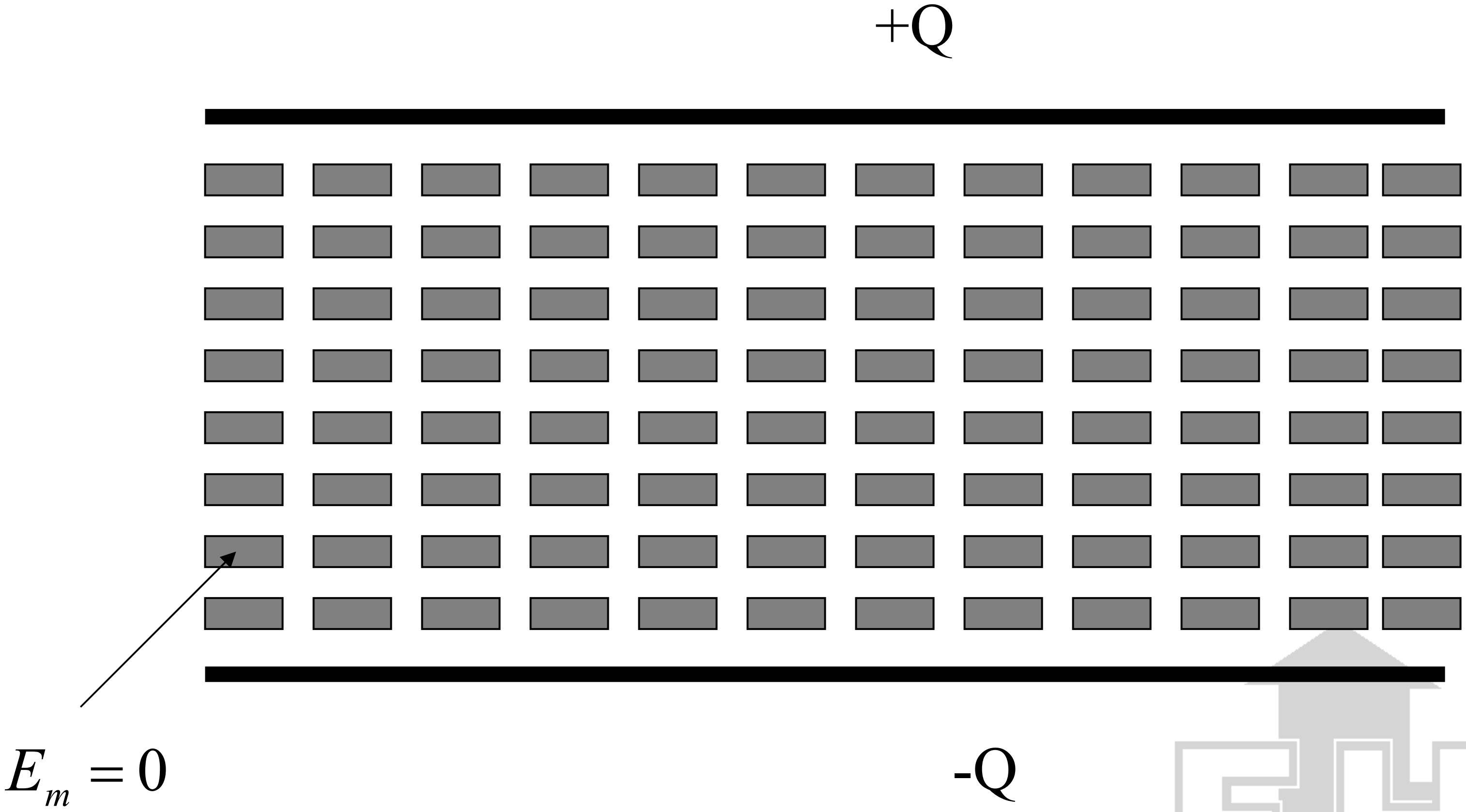
$$E_d = 4\pi Q/S$$



$$E_m = 0$$

Более совершенная модель, дающая изотропную картину это система проводящих шариков, заполняющая объем диэлектрика. Появление диэлектрической проницаемости тогда объясняется действием зарядов, индуцируемых в каждом шарике при наложение на систему электрического поля. При этом идея о проводящих и непроводящих областях не так уж существенна. Важна лишь величина зарядов и расстояние на которое они расходятся. Последние величины определяют дипольный момент q включения. В дальнейшем мы будем представлять диэлектрик как совокупность диполей, момент каждого из которых пропорционален приложенному полю.

$$C = Q/U = Q/(4\pi Q\left(d - d_m\right)/S) \sim S/\left(d - d_m\right)$$



Если мы проведем воображаемую поверхность через диэлектрик, то при наложении поля через элемент этой поверхности пройдет заряд $(\vec{P}\vec{n})$, где $P=Nq$ средняя поляризация, N плотность диполей, а n нормаль к поверхности, а $q = ed$. Обозначая образовавшийся внутри замкнутой поверхности заряд как ΔQ, получим

$$\Delta Q = -\oint\!\!\oint Pnds = \iiint \rho_{bound} dv$$

Заменяя при помощи теоремы Гаусса, поверхностный интеграл объемным получим выражение для поляризационных зарядов

$$\rho_{bound} = -\mathrm{div}\vec{P}$$

что позволяет ввести электрическую индукцию D $\mathrm{div}D = 4\pi\rho_{free}$

$$\mathrm{div}E = 4\pi\left(\rho_{free} + \rho_{bound}\right) = 4\pi\rho_{free} - 4\pi\mathrm{div}P =$$

$$= \mathrm{div}\left(D - 4\pi P\right)$$

И так в статике для нахождения полей мы имеем два уравнения для двух полей $\operatorname{div} D = 4\pi\rho_{free}$ $\operatorname{rot} E = 0$ Для их успешного решения необходимо найти связь между D и E. В предположении о линейности отклика системы для описания этой связи вводится диэлектрическая проницаемость ε:

$$D = \varepsilon E$$

Нашей основной задачей является расчет ε по известным свойствам среды.

$$\langle D \rangle = \varepsilon_{eff} \langle E \rangle$$

Отметим, что с точки зрения математики две проблемы электростатики, а именно, распределение индукции в системе диэлектриков и распределение тока в системе проводников эквивалентны. Замена ε на σ, а D на j переводит уравнения $D = \varepsilon E$ $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ в

$$j = \sigma E \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Для потенциальных полей определение $\left\langle j_i \right\rangle = \sigma_{ij}^{eff\,(1)} \left\langle E_j \right\rangle$ эквивалентно определениям, полученным из энергетических соображений:

$$w = \left\langle \vec{j}\vec{E} \right\rangle = \sigma_{ij}^{eff\,(2)} \left\langle \vec{E} \right\rangle^2 = \left\langle \vec{j} \right\rangle^2 / \sigma_{ij}^{eff\,(3)}$$

$$\left\langle \vec{j}\vec{E} \right\rangle = -\frac{1}{V}\int j\nabla\varphi dv = -\frac{1}{V}\oint j\varphi dS + \frac{1}{V}\int \varphi \operatorname{div} j dv = \frac{1}{SL} I\Delta U =$$

$$= \frac{I}{S}\frac{U}{L} = \left\langle \vec{j} \right\rangle \left\langle \vec{E} \right\rangle = \sigma_{eff}^{(2)} \left\langle E \right\rangle^2$$

$$w = \left\langle \vec{j}\vec{E} \right\rangle = \left\langle j \right\rangle \left\langle E \right\rangle = \sigma_{ij}^{eff\,(1)} \left\langle \vec{E} \right\rangle^2 = \left\langle \vec{j} \right\rangle^2 / \sigma_{ij}^{eff\,(1)}$$

Отклик шарообразного включения на внешнее поле

А. Для начала, рассмотрим вспомогательную задачу о диэлектрической сфере радиуса *R,* диэлектрической проницаемости ε_{int} , окруженной однородной средой с диэлектрической проницаемостью ε_{ext}. Предполагается, что вся система помещена во внешнее поле E_0 . Потенциал ищем в виде $$\varphi^{(e)} = -\vec{E}_o\vec{r} + \varphi_2$$

В силу сферической симметрии частицы и однородности внешнего поля поправка может зависеть только от постоянного вектора E_0. Единственное решение уравнения Лапласа, обращающееся в ноль на бесконечности и имеющую угловую зависимость определяемую постоянным вектором, это: $\varphi_2 = A\vec{E}_o\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, а не имеющее особенности в нуле и зависящее от того же вектора $\varphi^{(i)} = -B\vec{E}_o\vec{r}$

Константы A и B следует определить из граничных условий на поверхности сферы, а именно, из непрерывности потенциала и нормальной компоненты тока.

$$\varphi^{(i)}\Big|_{r=R} = \varphi^{(ext)}\Big|_{r=R} \qquad \varepsilon_{\text{int}}\left(n\nabla\varphi^{(i)}\right)\Big|_{r=R} = \varepsilon_{ext}\left(n\nabla\varphi^{(ext)}\right)\Big|_{r=R}$$

Первое условие предполагает непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля. Действительно, в этом случае для любой кривой, лежащей на сфере

$$\frac{\partial}{\partial l}\varphi^{(i)}\Big|_{r=R} = \frac{\partial}{\partial l}\varphi^{(ext)}\Big|_{r=R} = f(l)$$

Интегрируя вдоль произвольной кривой, получим

$$\varphi^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) + \int_0^l f(s)ds, \ \varphi^{(ext)}(l) = \varphi^{(ext)}(0) + \int_0^l f(s)ds$$

Если $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(ext)}(0)$, то они равны на всей поверхности сферы. Так как внутренний потенциал определен с точностью до константы, условие равенства потенциалов в одной точке легко достижимо. Второе условие следует из $\operatorname{div}\left(\varepsilon\nabla\varphi\right) = 0$

Из непрерывности потенциала следует, что

$$\varphi^{(e)} = -\vec{E}_o\vec{r} + A\vec{E}_o\frac{\vec{r}}{r^3} = \varphi^{(i)} = -B\vec{E}_o\vec{r}$$

или

$$\boxed{\left(1-\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{R}^3}\right) = \boldsymbol{B}}$$

Условие непрерывности нормальной составляющей тока дает

$$\left(\vec{\boldsymbol{D}}^{(ext)}\vec{\boldsymbol{n}}\right) = -\varepsilon_{ext}\left(\vec{\boldsymbol{n}}\nabla\varphi^{(e)}\right) = \varepsilon_{ext}\left(\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{E}}_o\right)\left(1-\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{R}^3}+\frac{3\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{R}^3}\right) = \left(\vec{\boldsymbol{n}}\vec{\boldsymbol{D}}^{(i)}\right) = \varepsilon_{\text{int}}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{n}\vec{\boldsymbol{E}}_o\right)$$

или

$$\boxed{\varepsilon_{ext}\left(1+\frac{2\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{R}^3}\right) = \varepsilon_{\text{int}}\boldsymbol{B}}$$

$$B = \frac{3\varepsilon_{ext}}{2\varepsilon_{ext}+\varepsilon_{int}} \qquad A = (1-B)R^3 = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon_{\text{int}}-\varepsilon_{ext}}{\varepsilon_{\text{int}}+2\varepsilon_{ext}}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)$$

$$\boxed{\vec{E}_{in} = \frac{3\varepsilon_{ext}}{2\varepsilon_{ext} + \varepsilon_{int}} \vec{E}_o}$$

Возмущение внешнего поля равно полю диполя с дипольным моментом $\vec{d} = A\vec{E}_0$

Иными словами сфера поляризована с плотностью поляризации

$$d = \frac{A\vec{E}_0}{4\pi R^3/3} = \frac{P_{\text{int}}}{\varepsilon_{ext}} - P_{ext} = \alpha\vec{E}_0$$

где $\vec{\boldsymbol{P}}_{\textbf{int}} = \left(\varepsilon_{\textbf{int}} - 1\right)\vec{\boldsymbol{E}}_{\textbf{int}}$, $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{ext}} = \left(\varepsilon_{\boldsymbol{ext}} - 1\right)\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{ext}}$ поляризации внешней и внутренней среды.

Удельная восприимчивость равна

$$\alpha = \frac{\boldsymbol{A}}{4\pi \boldsymbol{R}^3/3} = \frac{3}{4\pi}\frac{(\varepsilon_{int} - \varepsilon_{\boldsymbol{ext}})}{(2\varepsilon_{\boldsymbol{ext}} + \varepsilon_{int})}$$

Приближенные методы расчеты эффективных параметров

А. Случай малых концентраций, формула Максвелла, газовое приближение. Для случая сильно разбавленной системы, когда можно пренебречь взаимодействием разных включений $<E>=E_0$, полезно рассмотреть интеграл

$$I=\frac{1}{V}\int(D-\varepsilon_{ext}E)dv=<D>-\varepsilon_{ext}<E>$$

Подставляя решение для одиночного шарика и замечая, что подынтегральное выражение отлично от нуля только внутри включения, получим

$$I=\frac{\int(D-\varepsilon_{ext}E)dv}{V}=p\left(\varepsilon_{int}-\varepsilon_{ext}\right)E_{int}=p\frac{3\varepsilon_{ext}\left(\varepsilon_{int}-\varepsilon_{ext}\right)}{\left(\varepsilon_{int}+2\varepsilon_{ext}\right)}E_0$$

$$<D>=\left[\varepsilon_{ext}+p\frac{3\varepsilon_{ext}\left(\varepsilon_{int}-\varepsilon_{ext}\right)}{\left(\varepsilon_{int}+2\varepsilon_{ext}\right)}\right]E_0$$

$$I_1 = \frac{1}{V}\int\left(\frac{D}{\varepsilon_{ext}} - E\right)dv = \frac{<D>}{\varepsilon_{ext}} - \frac{<D>}{\varepsilon_{eff}}$$

$$\varepsilon_{eff} = \frac{<D>}{\dfrac{<D>}{\varepsilon_{ext}} - I_1}$$

$$D_{int} = \frac{3\varepsilon_{ext}\varepsilon_{int}}{2\varepsilon_{ext} + \varepsilon_{int}}\vec{E}_o$$

$$<E> = \frac{<D>}{\varepsilon_{eff}}$$

$$I = \frac{\int\left(\dfrac{D}{\varepsilon_{ext}} - \dfrac{D}{\varepsilon_{int}}\right)dv}{V} = p\left(\frac{1}{\varepsilon_{ext}} - \frac{1}{\varepsilon_{int}}\right)D_{int} = p\frac{3\varepsilon_{ext}\left(\varepsilon_{int} - \varepsilon_{ext}\right)}{\left(\varepsilon_{int} + 2\varepsilon_{ext}\right)}E_0$$

Б. Случай малых отклонений диэлектрической проницаемости от среднего значения. Другой предельный случай, когда можно получить решение это случай слабых возмущений, когда диэлектрическую проницаемость можно представить в виде $\varepsilon(r)=\varepsilon_0+\delta\varepsilon(r)$ и $\delta\varepsilon/\varepsilon_0 << 1$. Среднее значение индукции равно $< D >=< (\varepsilon_0+\delta\varepsilon)(E+\delta E) >= \varepsilon_0 E + < \delta\varepsilon\delta E >$

Проведем это усреднение в два этапа. Во первых усредним по включениям одного сорта, а затем по типу включений. На первом этапе будем считать, что включение окружено средой со средней проницаемостью ε_0 , тогда возмущение поля внутри включений в среднем равно

$$\delta E = E_{\text{int}} - E = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon(r)+2\varepsilon_0}E - E = -\frac{\delta\varepsilon}{\delta\varepsilon(r)+3\varepsilon_0}E$$

Пренебрегая членом $\delta\varepsilon$ в знаменателе, получим

$$<\delta\varepsilon\delta E>=-\frac{(\delta\varepsilon)^2}{3\varepsilon_0}E$$

Подставляя это выражение в выражение для индукции

$$<D>=<(\varepsilon_0+\delta\varepsilon)(E+\delta E)>=\varepsilon_0 E+<\delta\varepsilon\delta E>$$

Окончательно получим $\varepsilon_{eff}=\varepsilon_0-\left\langle\frac{(\delta\varepsilon)^2}{3\varepsilon_0}\right\rangle$

$$<\varepsilon^{1/3}>=<\left(\varepsilon_0+\delta\varepsilon\right)^{1/3}>=\varepsilon_0^{1/3}<\left(1+\frac{\delta\varepsilon}{3\varepsilon_0}-\frac{(\delta\varepsilon)^2}{9\varepsilon_0{}^2}+\ldots\right)>=$$

$$=\varepsilon_0^{1/3}\left(1-\left\langle\frac{(\delta\varepsilon)^2}{9\varepsilon_0{}^2}\right\rangle\right)=\varepsilon_0^{1/3}\left(1-\left\langle\frac{(\delta\varepsilon)^2}{3\varepsilon_0{}^2}\right\rangle\right)^{1/3}=\varepsilon_{eff}^{1/3}$$

$$\boxed{\varepsilon_{eff}=<\varepsilon^{1/3}>^3}$$

B. Локальное поле в дискретной системе. Формулы Лорентц-Лоренца, Гарнетта

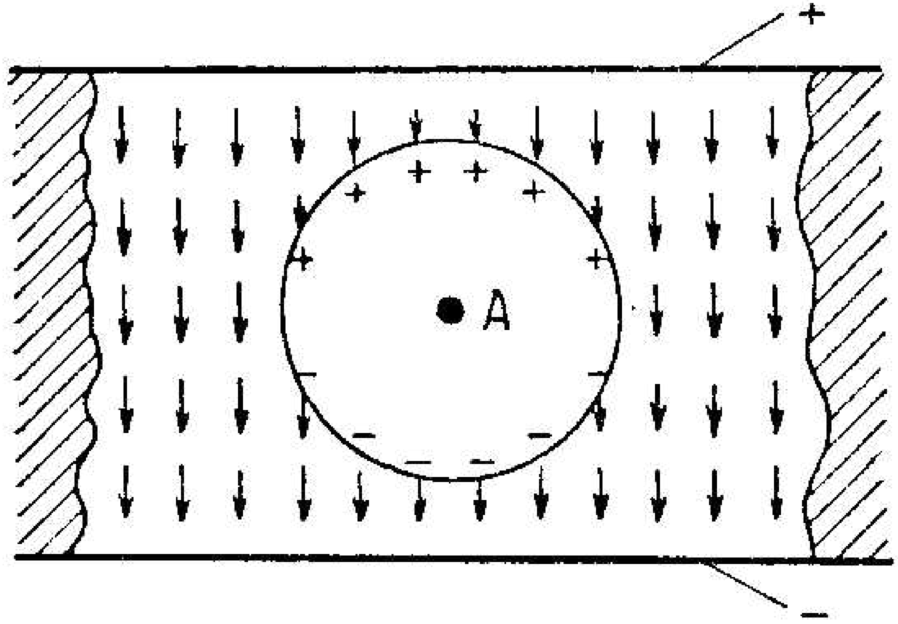
Попытаемся учесть взаимное влияние включений. Действующее на отдельное включение поле, вообще говоря, отлично как от внешнего так и от среднего поля. В газовом приближении, только что рассмотренном, предполагалось, что все эти поля равны. При повышении концентрации и сближении частиц мы более не можем пренебрегать влиянием частиц друг на друга. Тем не менее мы будем предполагать, что можно пренебречь изменением действующего (локального) поля на масштабе включения. Это возможно, если размер включения все еще меньше расстояния между включениями. В этом случае включения можно считать точечными диполями, пренебрегая вкладом мультиполей.

Наиболее распространенным приближением для расчета является формула Клаузиуса-Моссотти-Лорентц-Лоренца (КМЛЛ):

(1) $$E_{loc} = \langle E \rangle + 4\pi P / 3$$

Обычно это выражение получается путем суммирования внешнего поля и полей включений, окружающих данное. При этом возникают трудности, связанные с необходимостью суммирования не абсолютно (условно) сходящиеся ряды. Рассмотрим типичные рассуждения, восходящие к Лорентцу.

Чтобы определить напряжённость поля в центре какого-либо диполя, опишем из этого центра сферу физически бесконечно малого радиуса. Поле в точке A будет слагаться, во-первых, из поля всех зарядов, расположенных вне сферы, и, во-вторых, из поля зарядов, лежащих внутри сферы, за исключением зарядов самого диполя A. $E_{loc} = E_{ext} + E_2 + E_3$



$$E_2 = \sum\nolimits_{R_L<r} \left(3\left(\vec{p}\cdot\vec{r} \right)\vec{r}/r^5 - \vec{p}/r^3 \right) \quad E_3 = \sum\nolimits_{0<r<R_L} \left(3\left(\vec{p}\cdot\vec{r} \right)\vec{r}/r^5 - \vec{p}/r^3 \right)$$

$$E_2 = \int_{V\backslash V_L} E_{dip}\,dv = 4\pi P/3$$

$$E_{dipx} = \frac{3\left(\vec{p}\vec{R}\right)x - p_x R^2}{R^5} = \frac{p_x\left(2x^2 - y^2 - z^2\right) + 3x\left(p_y y + p_z z\right)}{R^5}$$

$$E_{3x} = \sum p_x \frac{\left(x^2 - y^2\right)}{R^5} + \sum p_x \frac{\left(x^2 - z^2\right)}{R^5} + 3\sum p_y \frac{xy}{R^5} + 3\sum p_z \frac{xz}{R^5}$$

$$E_{loci} \equiv \left(1/4\pi\varepsilon_0\right)\sum\nolimits_{i\neq j}\left(3R_{ij}R_{ij} - R_{ij}^2\overleftrightarrow{\mathrm{I}}\right)p_j/R_{ij}^5 + E_2 = \sum\nolimits_{i\neq j}\Lambda\left(R_{ij}\right)p_j + P/3\varepsilon_0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \left(2m^2 - n^2 - s^2\right)\Big/\left[m^2 + n^2 + s^2\right]^{5/2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty\,\prime}\sum_{s=-\infty}^{\infty\,\prime}\sum_{m=-\infty}^{\infty\,\prime}\frac{2m^2-n^2-s^2}{\left[m^2+n^2+s^2\right]^{5/2}} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty\,\prime}\sum_{s=-\infty}^{\infty\,\prime}\sum_{m=-\infty}^{\infty\,\prime}\frac{m^2-n^2}{\left[m^2+n^2+s^2\right]^{5/2}}+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty\,\prime}\sum_{s=-\infty}^{\infty\,\prime}\sum_{m=-\infty}^{\infty\,\prime}\frac{m^2-s^2}{\left[m^2+n^2+s^2\right]^{5/2}}=0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty\,\prime}\sum_{s=-\infty}^{\infty\,\prime}\sum_{m=-\infty}^{\infty\,\prime}\frac{2m^2-n^2-s^2}{\left[m^2+n^2+s^2\right]^{5/2}} \Rightarrow$$

$$4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{2m^2-n^2-s^2}{\left[m^2+n^2+s^2\right]^{5/2}}+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{2m^2-n^2}{\left[m^2+n^2\right]^{5/2}}+2\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{2m^2-s^2}{\left[m^2+s^2\right]^{5/2}}\approx$$

$$\approx 4.808-64\pi^2K_0(2\pi)\approx 4.228$$

Попробуем разобраться в сути явления, избежав суммирования несуществующих сумм. Для этого рассмотрим конечные системы. При этом универсальной (не зависящей от формы тела) является связь не с внешним полем, а со средним.

фон Хиппель $$E_{loc} = E_{ext} + E_2 + E_3$$

$$E_{loc} = \langle E \rangle + 4\pi P / 3$$

Мысленно разобьем диэлектрик на систему ячеек Вигнера-Зейтца в случае кристалла или на систему ячеек Вороного в случае неупорядоченного диэлектрика. При расчете локального поля внутри одной из ячеек мы должны учесть лишь поля всех остальных ячеек.

$$E_{loc}(r') = E_{ext} + \sum_r E_{dip}(r' - r)$$

При расчете среднего поля мы должны усреднить локальное поле по объему ячейки и добавить возмущение поля, вносимое включением-диполем, находящимся в центре выбранной ячейки.

$$\langle E \rangle = E_{ext} + \langle E_{incl} \rangle + \frac{1}{V_{cell}} \sum_r \int_{V_{cell}} \left(E_{dip}(x + r_c - r) \right) d^3(x) =$$

$$= E_{ext} + \sum_r E_{dip}(r_c - r) + \langle E_{incl} \rangle +$$

$$\frac{1}{V_{cell}} \sum_r \int_{V_{cell}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} E_{dip}(r_c - r) x_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E_{dip}(r_c - r) x_i x_j + \ldots \right) \prod_j dx_j$$

$$\langle E\rangle = E_{loc} + \langle E_{incl}\rangle +$$

$$\frac{1}{V_{cell}}\sum_{r}\int_{V_{cell}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}E_{dip}(r_c-r)x_j+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}E_{dip}(r_c-r)x_i x_j+\ldots\right)\prod_j dx_j$$

Заметим, что для любой конечной системы как локальное так и среднее поля зависят от формы образца. Их же разность зависит от формы более слабо. Прежде всего отметим, что суммы в приведенном выражении сходятся абсолютно: общий член в n-ой сумме стремится к нулю как $(r-r_c)^{-3-n}$. Остаток суммы можно оценить как

$$\int_{r>R_*}(r-r_c)^{-3-n+2}\,d(r-r_c)=R_*^{-n}$$

Множитель перед суммой пропорционален a^n, где a размер включения.

$$\sum\nolimits_{n=1} c_n(a/R_*)^n < (a/R_*)/\big(1-(a/R_*)\big)\approx(a/R_*)$$

Для сферически симметричной ячейки множитель перед нечетными суммами равен нулю, а перед четными имеет вид $\left(\int_{V_{cell}}\left(x_i x_j\right)\prod_j dx_j\right)\propto \delta_{ij}$

Для поля диполя $\sum_i\left(\partial^2/\partial^2 x_i\left[E_{dip}\left(r_c -,r\right)\right]\right)\equiv 0$ так что все четные члены тоже равны нулю. Например, для члена с четвертой производной получим:

$$\left\langle x_i x_j x_k x_l \frac{\partial^4 E_{dip}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right\rangle = A(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\frac{\partial^4 E_{dip}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} =$$

$$= 3A\sum_{ik}\frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}\left(\frac{\partial^2 E_{dip}}{\partial^2 x_k}\right)=0$$

Таким образом, для сферически симметричной ячейки зависимость от формы образца полностью исчезает.

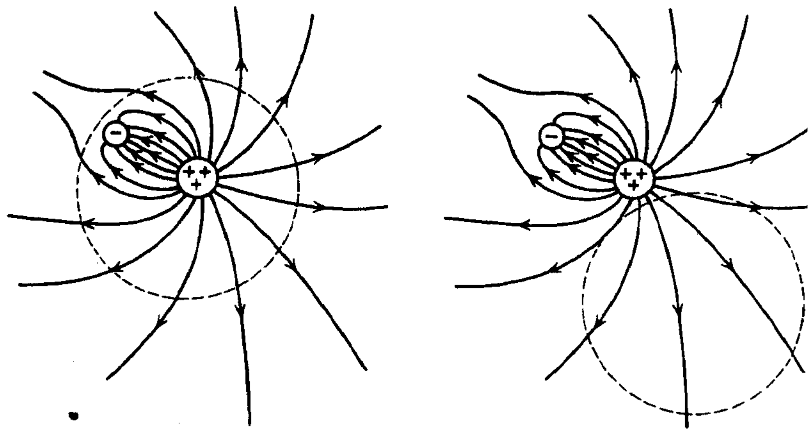
$$\langle E \rangle - E_{loc} = \langle E_{incl} \rangle +$$

$$\frac{1}{V_{cell}}\left(\int\limits_{V_{cell}} (x_j) \prod_j dx_j \right) \sum_r \left(\frac{\partial}{\partial x_j} E_{dip}(r_c - r) \right) +$$

$$\frac{1}{V_{cell}}\left(\int\limits_{V_{cell}} (x_i x_j) \prod_j dx_j \right) \sum_r \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E_{dip}(r_c - r) \right) + \ldots$$

Вернемся к рассмотрению члена $\langle E_{incl} \rangle$. В известной книге Джексона "Классическая электродинамика" показано, что для поля зарядов с распределением , интеграл по сфере объема V зависит от местоположения сферы. В двух предельных случаях -- все заряды внутри сферы и все заряды вне сферы получаются простые выражени

$$\frac{1}{V}\int\limits_V \vec{E}(\vec{x})\, d^3x = \begin{cases} -\dfrac{4\pi}{3}\vec{P} \\ \vec{E}(0) \end{cases}$$



(a) (b)

$$\vec{E}_{dip} = \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4\pi\vec{p}}{3}\delta(r)$$

Природу этого члена легко понять, считая включение диэлектрической сферой, дипольный момент которой равен

$$p = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_{incl}-1}{2+\varepsilon_{incl}}\right)V_{incl}E_{ext}$$

Заметим, что при расчете $\langle E_{incl}\rangle$ из полного поля внутри включения нужно вычесть величину локального поля, учтенного ранее.

$$\left(\vec{E}_{incl} - E_{loc}\right)\frac{V_{incl}}{V_{cell}} = \frac{V_{incl}}{V_{cell}}\frac{1-\varepsilon_{incl}}{2+\varepsilon_{incl}}E_{loc} = -\frac{4\pi}{3}\frac{1}{V_{cell}}p = -\frac{4\pi}{3}Np = -\frac{4\pi}{3}P$$

Таким образом, с точностью до членов, содержащих "решеточные" суммы, мы получили формулу КМЛЛ. Рассмотрим физический смысл оставшихся членов. Для этого найдем разницу между полями индуцируемыми непрерывным и дискретным распределением зарядов $N \to \infty$

$$E_{loc}^{cont}\left(r'\right) = E_{ext} + \sum_{r}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E_{dip}\left(r' - r^{(k)}\right)\right) =$$

$$= E_{ext} + \sum_{r}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(E_{dip}\left(r' - r\right) + \left(x_j{}' - x_j^{(k)}\right)\frac{\partial E_{dip}\left(r' - r\right)}{\partial x_j}\right) + \ldots\right] =$$

$$= E_{loc}\left(r'\right) + \sum_{r}\left[\frac{1}{V_{cell}}\left(\int\limits_{\mathrm{V}_{cell}}\left(x_j\right)\prod_{j} dx_j\right)\sum_{r}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}E_{dip}\left(r_{\mathrm{cell}} - r\right)\right) + \ldots\right] =$$

$$= E_{loc}\left(r'\right) + E_G$$

Отметим, что ранее часто считалось, что именно дискретный характер окружения ответственен за всю поправку Лорентца. Так Займана в своей известной книге "Принципы теории твердого тела" пишет: "**Вводя свою поправку Лорентц, заменяет локальное поле, возникшее благодаря дипольным моментам соседних атомов, полем сферической полости в однородной среде**". К этому вопросу мы вернемся несколько позднее, а теперь рассмотрим следствия из изложенной теории для электродинамики композитов. Из формулы КМЛЛ непосредственно следует выражение для поляризации, учитывающее взаимное влияние включений

$$P = N\alpha\left(E + \frac{4\pi}{3}P\right) \qquad P = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha\left(\frac{4\pi}{3}\right)}E$$

Используя выражение для восприимчивости диэлектрического шара

$$\alpha = \frac{3}{4\pi}\frac{(\varepsilon_{int} - \varepsilon_{\text{ext}})}{2\varepsilon_{\text{ext}} + \varepsilon'_{int}}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)$$

приходим к известной формуле Гарнетта

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_{\text{ext}} + 3p\frac{\varepsilon_{\text{ext}}(\varepsilon_{\text{int}} - \varepsilon_{\text{ext}})}{(\varepsilon_{\text{int}} + 2\varepsilon_{\text{ext}}) - p(\varepsilon_{\text{int}} - \varepsilon_{\text{ext}})}$$

Учитывая эквивалентность задач об эффективной проводимости и диэлектрической проницаемости, рассмотрим задачу о сверхпроводящих включениях $\sigma_s = \infty$ в проводящей матрице $\sigma_{ext} = \sigma_m$

$$\sigma_{eff} = \sigma_m\left(1 + \frac{3p}{(1-p)}\right) \xrightarrow[p \to 1]{} \infty$$

В приближение Гарнетта смесь становится сверхпроводящей только в пределе чистого сверхпроводника. На языке теории протекания это означает, что порог протекания в этом приближении равен единице.

ЗАДАЧИ

1. $\varepsilon_{int} = -2\varepsilon_{ext}$

2. Гарнетт для среды с отрицательной диэлектрической проницаемостью