Программа курса
ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ - II
(6-й семестр, 32 часа, зачет).

0. Предварительные сведения

Предполагается, что приступающий к изучению курса студент основательно знаком со свойствами модели, описывающей линейный осциллятор с вязким трением с гармонической вынуждающей внешней силой,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F\cos\omega t,$$

и терминами, используемыми для их описания, примерно в объеме сведений, содержащихся в §§ 22, 25 и 26 книги [ЛЛI]

📖 [ЛЛI] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. - в 10-ти т. - т. I. Механика. - 4-е изд. М.: Наука, 1988. - 216 с.

1. Введение.

1.1 Кинематика колебаний: модели движения. Основная модель - гармонические колебания. Амплитуда, частота, фаза. Периодические колебания. Разложение в ряд Фурье, гармоники. Коэффициент ангармонизма периодических колебаний. Релаксационные колебания. Коэффициент релаксационности.

Квазипериодические колебания. Кинематические резонансы: резонансные соотношения, представление отношений частот цепными дробями.

Модулированные колебания. Медленно меняющиеся амплитуда и фаза. Затухающие колебания. Апериодическое движение как предельный случай затухающих колебаний. Интеграл Фурье.

1.2 Динамика колебаний: модели систем. Конечномерные динамические системы. Фазовое пространство. Уравнения движения. Собственные масштабы задачи и переход к безразмерным переменным. Классификация динамических систем: автономные и неавтономные системы, автономизация. Размерность расширенного фазового пространства K. Локальная диссипация, теорема об изменении фазового объема.

Основные задачи теории динамических систем. Задача Коши. Исследование устойчивости движения. Исследование структуры фазового пространства: исключительные фазовые траектории - неподвижные точки и предельные циклы. Аттрактор, бассейн аттрактора, ловушка. Исследование динамической системы в пространстве параметров. Бифуркации.

1.3 Исследовательская программа теории колебаний.

2. Одномерные модели

2.1 Автономные одномерные системы: неподвижные точки и релаксационные движения. Би- и мультистабильность. Основные типы бифуркаций неподвижных точек в одномерной системе - тангенциальная бифуркация, бифуркация удвоения, бифуркация смены устойчивости.

2.2 Неавтономные одномерные модели. Бифуркации и гистерезис. Запаздывание вынужденных колебаний в релаксационных системах.

3. Двумерные модели

3.1 Автономные системы с одной степенью свободы ($K = 2$). Фазовая плоскость. Качественное описание структуры движения: неподвижные точки и аттракторы. Линеаризация модели вблизи неподвижных точек и их классификация. Седло, узел, центр, фокус. Сепаратриса седловой точки.

3.2 Двумерные интегрируемые системы. Гамильтоновы системы с одной степенью свободы. Переменные "действие - угол". Линейный осциллятор

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Частица в потенциальном ящике. Маятник

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} \pm x \pm x^3 = 0$$

- три варианта (вариант со знаками "$-/-$" исключается).

3.3 Пример интегрируемой диссипативной системы - уравнения Лотка - Вольтерра.

$$\dot{x} = k_1 x - a_1 xy, \qquad \dot{y} = -k_2 y + a_2 xy.$$

3.4 Автоколебания систем с одной степенью свободы. Осциллятор Рэлея

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}\left(1 - \dot{x}^2\right) + x = 0.$$

Симметрия системы. Неподвижная точка, ее неустойчивость. Диссипация. Томсоновский случай $\alpha << 1$ - зависимость частоты автоколебаний от α (метод Крылова - Боголюбова). Релаксационный случай $\alpha >> 1$ - разделение быстрых и медленных движений. Зависимость частоты автоколебаний от α.

3.5 Брюсселятор - система с уравнениями движения

$$\dot{x} = a - (b+1)x + x^2 y, \qquad \dot{y} = bx - x^2 y$$

Неподвижная точка, ее характер. Управляющий параметр $\lambda = b - 1 - a^2$. Диссипация. Томсоновский случай $\lambda << 1$ - зависимость частоты автоколебаний от λ (метод Крылова - Боголюбова). Релаксационный случай $\lambda >> 1$ - разделение быстрых и медленных движений. Зависимость частоты автоколебаний от λ.

3.6 Общие свойства систем с предельными циклами. Необходимые условия существования предельных циклов в данной области фазового пространства - критерий Бендиксона. Бифуркации, приводящие к возникновению предельных циклов - смена устойчивости фокуса и рождение предельного цикла из сепаратрисы.

4. Трехмерные модели

4.1 Неавтономные системы с одной степенью свободы ($K = 3$). Основные типы движения - периодическое и квазипериодическое (бигармоническое).

А. Периодические движения

4.2 Нелинейный резонанс в диссипативном осцилляторе Дуффинга

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t$$

Установившиеся колебания. Главный резонанс: критические значения частоты и силы, неоднозначная зависимость амплитуды первой гармоники от параметров. Область бистабильности, исследование устойчивости решений. Высшие поправки - третья гармоника.

4.3 Субгармонический резонанс порядка 3 в модели диссипативного осциллятора Дуффинга. Зависимость амплитуды первой гармоники от F и ω в пренебрежении затуханием. Роль затухания: критические условия существования субгармонического резонанса.

4.4 Супергармонический резонанс порядка 1/3 в модели диссипативного осциллятора Дуффинга. Зависимость амплитуды первой гармоники от F и ω в пренебрежении затуханием. Роль затухания: критические условия существования супергармонического резонанса.

Б. Квазипериодические движения

4.5 Квазипериодическое движение в консервативных системах. Слабое воздействие - линейный отклик: формула для восприимчивости. Нелинейный резонанс консервативного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t$$

Описание методом медленно меняющихся амплитуд (ММА): гамильтоново описание и структура фазовой плоскости.

4.6 Нелинейный резонанс - описание в переменных действие - угол. Параметр неизохронности. Стандартная модель маятника для нелинейного резонанса. Ширина нелинейного резонанса по действию и по частоте.

4.7 Квазипериодические и периодические движения в системах с предельными циклами при силовом воздействии. Синхронизация. Условия синхронизации в осцилляторе Ван дер Поля.

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x}\left(1 - x^2\right) + x = F\cos\omega t$$

Устойчивость синхронных колебаний. Бистабильность.

4.8 Системы с параметрическим воздействием: линейный параметрический осциллятор.

$$\ddot{x} + \left[1 + \varepsilon\cos\omega t\right]x = 0$$

Глубина модуляции параметра. Теорема Флоке. Характеристический показатель. Области неустойчивости и параметрический резонанс. Связь с квантовой задачей о движении частицы в периодическом потенциале. Теорема Блоха.

4.9 Модели теории устойчивости периодических движений - уравнение Хилла. Исследование устойчивости колебаний при субгармоническом и супергармоническом резонансах в осцилляторе Дуффинга.

4.10 Модели квантовой теории с конечным числом мод: простейшая модель двухуровневой системы в гармоническом внешнем поле.

4.11 Параметрический резонанс в нелинейных системах: осциллятор Дуффинга с модулированной частотой

$$\ddot{x} + [1 + \varepsilon \cos \omega t] x \pm x^3 = 0$$

5. Многомерные модели

5.1 Линейные системы с большим числом степеней свободы ($N \geq 2$). Случай $N = 2$. Парциальные системы. Парциальные частоты. Нормальные координаты, частоты и моды. График Вина, связанность. Колебания многоатомных молекул.

5.2 Нелинейные консервативные системы с двумя степенями свободы - осциллятор Паллена - Эдмондса. Случай слабой связи: резонансный гамильтониан.

5.3 Автоколебания в системах с двумя степенями свободы. Осциллятор Ван дер Поля, связанный с линейной системой. Два связанных осциллятора Ван дер Поля - синхронизация колебаний.

6. Дифференциально - разностные модели

6.1 Дифференциально-разностные уравнения. Линейная модель первого порядка. Метод последовательного интегрирования. Спектр характеристических показателей и область устойчивости. ■

ЛИТЕРАТУРА

А. Основная

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И.
Введение в теорию колебаний и волн.
М.: Наука, 1984. - 432 с. [РТ84].

2. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.
Основы теории колебаний. - 2-е изд.
М.: Наука, 1988. - 392 с. [ММ+88]

Б. Дополнительная

Г52 Горелик Г.С.
Колебания и волны.
М.: Физматгиз, 1952. - 572 с.

С53 Стокер Дж.
Нелинейные колебания в механических и электрических системах.
М.: ИЛ, 1953. - 240 с.

Х57 Хаяси Т.
Вынужденные колебания в нелинейных системах.
М.: ИЛ, 1957. - 204 с.

С64 Стрелков С.П.
Введение в теорию колебаний.
М.: Наука, 1964. - 437 с.

Б69 Блакьер О.
Анализ нелинейных систем.
М.: Мир, 1969. - 400 с.

М72 Мандельштам Л.И.
Лекции по теории колебаний.
М.: Наука, 1972. - 470 с.

Л80 Ланда П.С.
Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы.
М.: Наука, 1980. - 400 с.

ЗС88 Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.
Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса.
М.: Наука, 1988. - 368 с.

БЛ90 Баутин Н.А., Леонтович Е.А.
Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд.
М.: Наука, 1990. - 488 с.

Г95 - Горяченко В.Д.
Элементы теории колебаний.
Красноярск : Изд-во Красноярского университета, 1995. - 430 с.

Л97 Ланда П.С.
Нелинейные колебания и волны.
М.: Наука, 1997. - 496 с.

Автор программы- доцент П.В. Елютин

Электронные версии конспектов прочитанных лекций можно найти в Internet по адресу:

http://kali.ilc.msu.su/educat/vib.htm

☯