

**ЛЕКЦИЯ #12**  
**КОЛЕБАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ**  
**СИСТЕМАХ**  
**КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ**

**§ 12.01 Квазипериодические движения**

◆ Обратимся теперь к рассмотрению квазипериодических движений в осцилляторе Ван дер Поля под воздействием гармонической внешней силы

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(1 - x^2) + x = F \cos \omega t \quad (1)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением томсоновского случая  $\alpha \ll 1$ , при котором в отсутствие внешней силы движение осциллятора хорошо описывается моделью гармонического колебания с частотой  $\Omega \approx 1$  и амплитудой  $A = 2$ .

$$x_0(t) = 2 \cos t \quad (2)$$

◆ Рассмотрим квазипериодическое движение вблизи границы полосы синхронизации при условии  $F \ll \alpha$ . В этом случае граничная расстройка полосы синхронизации (см. L11, ф-ла (46))

$$\Delta_c = \frac{F}{4} \quad (3)$$

также удовлетворяет условию  $\Delta_c \ll \alpha \ll 1$ . Ограничимся рассмотрением случая  $\Delta > 0$  (рассмотрение противоположного случая требует минимальных изменений). Для описания движения используем метод медленно меняющихся амплитуд. Представим решение как модулированное колебание с частотой внешней силы, вводя с помощью переменных амплитуды  $A$  и фазы  $\varphi$  решение

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (4)$$

с производной по времени

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi). \quad (5)$$

Подстановка этих выражений в уравнение движения (1) приводит к уравнениям для амплитуды и фазы

$$\dot{A} = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{A^2}{4} \right) A + \frac{F}{4} \sin \varphi. \quad (6)$$

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{F}{2A} \cos \varphi \quad (7)$$

В силу неравенства  $F \ll \alpha$  в уравнении (6) можно пренебречь вторым членом, и в низшем приближении принять амплитуду колебаний равной амплитуде невозмущенных автоколебаний:

$$A = A_0 = 2. \quad (8)$$

Уравнение (7) может быть элементарно проинтегрировано:

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{\Delta - \Delta_c}{\Delta + \Delta_c}} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}}{2} (t - t_0) \right] \right\} \quad (9)$$

Скорость изменения фазы дается выражением

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\Delta^2 - \Delta_c^2}{\Delta + \Delta_c \cos(\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2} (t - t_0))} \quad (10)$$

Из формулы (10) видно, что фаза монотонно растет, а скорость ее роста изменяется периодически с периодом  $T = 2\pi(\Delta^2 - \Delta_c^2)^{-1/2}$ .

◆ Характер квазипериодического движения существенно зависит от параметра

$$\chi = \frac{\Delta}{\Delta_c} - 1 \quad (11)$$

При малых  $\chi \ll 1$ , что соответствует близости к границе полосы синхронизации, скорость изменения фазы на большей части периода ее изменения  $T$  много меньше граничной расстройки:  $\dot{\varphi} \approx \chi \Delta_c$ . На коротком временном интервале продолжительности  $\Delta t \sim \sqrt{\chi} T$  скорость изменения фазы имеет пик, достигая максимального значения  $\max \dot{\varphi} \approx 2\Delta_c$ .

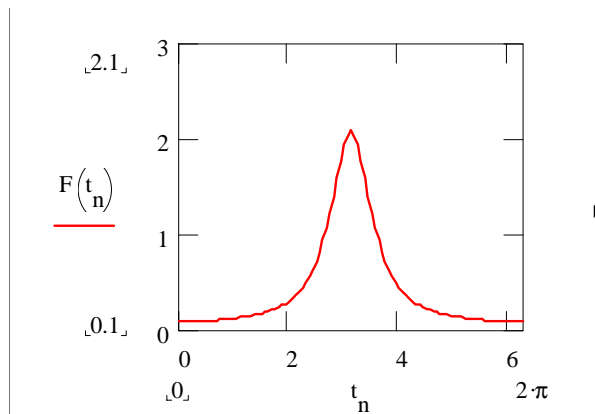


Рис. 12.1

Скорость изменения фазы решения (9) вблизи границы области синхронизации на одном периоде, нормированная на граничную расстройку. Значение параметра  $\chi = 0.1$ .

Поэтому вблизи границы области синхронизации, при  $\chi \ll 1$ , квазипериодическое движение системы содержит большое число  $N \sim \chi^{-1/2}$  спектральных компонент с частотами  $\Omega_k = \omega - k\sqrt{\chi}\Delta_c$ , заполняющих всю полосу синхронизации.

◆ При  $\chi \gg 1$  скорость изменения фазы можно считать постоянной:  $\dot{\varphi} \approx \Delta$ . Тогда решение (4) с постоянной амплитудой  $A = 2$  описывает просто невозмущенные автоколебания осциллятора с частотой  $\Omega = \omega - \Delta = 1$ . Для учета влияния внешней силы в этом случае надо уточнить приближение (8). Полагая

$A = 2 + \xi$ , подставляя это выражение в уравнение (6) и линеаризуя по  $\xi$ , получаем

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \left[ 2 + \frac{F}{2\alpha} \sin \Delta t \right] \cos t = \\ &= 2 \cos t + \frac{F}{4\alpha} \sin \omega t - \frac{F}{4\alpha} \sin(1 - \Delta)t. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, спектр квазипериодического движения осциллятора Ван дер Поля под действием слабой гармонической силы  $F \ll \alpha$  при больших расстройках  $\Delta \gg \Delta_c$  содержит три компоненты: на частоте невозмущенного движения  $\Omega_1 = 1$ , на частоте внешней силы  $\Omega_2 = \omega$  и на комбинационной частоте  $\Omega_3 = 2\Omega_1 - \Omega_2$ .

◆ Обратимся теперь к рассмотрению квазипериодического движения вблизи границы полосы синхронизации при противоположном условии  $F \gg \alpha$ . В этом случае в уравнении движения

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(1 - x^2) + x = F \cos \omega t \quad (1)$$

в первом приближении можно пренебречь членами, пропорциональными  $\alpha$ . Тогда осциллятор Ван дер Поля превращается в консервативный гармонический осциллятор, и его вынужденные колебания описываются законом

$$x(t) = \frac{F}{1 - \omega^2} \cos \omega t \quad (13)$$

В следующем приближении представим решение в виде

$$x(t) = \frac{F}{1 - \omega^2} \cos \omega t + a \cos t \quad (14)$$

где  $a(t)$  - медленно меняющаяся амплитуда. Подставляя решение (14) в (1), пренебрегая членами порядка  $\varepsilon^2$ , умножая уравнение на  $\sin t$  и усредняя по периоду, получаем уравнение для амплитуды в виде

$$\dot{a} = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{F^2}{2(1 - \omega^2)^2} \right) a \quad (15)$$

откуда для стационарной амплитуды автоколебаний получаем значение

$$a = \sqrt{4 - \frac{F^2}{2\Delta^2}} \quad (16)$$

При уменьшении расстройки амплитуда уменьшается, обращаясь в ноль при значении

$$\Delta_c = \pm \frac{F}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

которое соответствует найденной ранее (см. L11, ф-ла (51)) границе полосы синхронизации. Такой тип перехода от квазипериодического движения к периодическому носит название *синхронизации гашением*. При больших значениях расстройки амплитуда автоколебаний, как и следует, принимает невозмущенное значение  $a_0 = 2$ .

Отдельный класс задач о квазипериодическом движении двумерных неавтономных систем с возмущением, гармонически зависящим от времени, связан с моделью параметрически модулированного линейного осциллятора. При слабом возмущении движение этой модели часто оказывается квазипериодическим двухчастотным - одна из частот совпадает с частотой внешнего возмущения, а другая близка к частоте движения невозмущенной системы. Однако в некоторых областях параметров вторая частота движения становится мнимой - решение из квазипериодического превращается в гармоническое с амплитудой, растущей по экспоненциальному закону. Это явление называется **параметрическим резонансом**. Выделение областей параметрического резонанса составляет основную задачу теории.

### § 12.02 Параметрически модулированный линейный осциллятор

◆ Стандартной моделью для рассмотрения колебаний в параметрических системах является *параметрически модулированный линейный осциллятор* - гармонический осциллятор, квадрат частоты которого изменяется со временем по гармоническому закону. Эта система с уравнением движения

$$\ddot{x} + [1 + \varepsilon \cos \omega t]x = 0. \quad (18)$$

характеризуется двумя безразмерными параметрами - *глубиной модуляции параметра*  $\varepsilon$  и *частотой модуляции*  $\omega$ .

◆ В математике уравнение (18) называется уравнением Маттье ([Mathieu equation](#)), а его решения - функциями Маттье; они детально изучены и табулированы.

◆ Пусть  $\varepsilon \ll 1$ . Рассмотрим закон движения системы (18) с помощью теории возмущений. Перепишем уравнение (18) в виде

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = (\Omega^2 - 1)x - \varepsilon x \cos \omega t \quad (19)$$

где  $\Omega$  - частота, подлежащая определению. В нулевом приближении будем считать движение гармоническим колебанием с частотой  $\Omega$  и единичной амплитудой (поскольку уравнение (18) линейно, амплитуде можно придать желаемое значение выбором единиц измерения):

$$x_0 = \cos \Omega t. \quad (20)$$

Значение  $\Omega$  определится условием отсутствия в правой части возмущающих членов на частоте  $\Omega$  - это метод исключения резонанса, ранее применявшийся нами в §5.03 и §7.02. Подставляя в правую часть (19) решение нулевого приближения (20), получаем в первом приближении  $\Omega = 1$  и

$$x_1 = \cos \Omega t + \frac{\varepsilon}{2\omega(\omega + 2\Omega)} \cos(\omega + \Omega)t + \frac{\varepsilon}{2\omega(\omega - 2\Omega)} \cos(\omega - \Omega)t \quad (21)$$

Во втором приближении решение принимает вид

$$\begin{aligned} x_2 = & \cos \Omega t + \frac{\varepsilon}{2\omega(\omega + 2\Omega)} \cos(\omega + \Omega)t + \frac{\varepsilon}{2\omega(\omega - 2\Omega)} \cos(\omega - \Omega)t + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{16\omega^2(\omega + 2\Omega)(\omega + \Omega)} \cos(2\omega + \Omega)t + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{16\omega^2(\omega - 2\Omega)(\omega - \Omega)} \cos(2\omega - \Omega)t \end{aligned} \quad (22)$$

где частота  $\Omega$  определяется соотношением

$$\Omega^2 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2(\omega^2 - 4)}. \quad (23)$$

Для того, чтобы получаемые при последовательных итерациях поправки были малы, необходимо выполнение условий

$$\varepsilon \ll |\omega - 2|, \quad \varepsilon \ll |\omega - 1|. \quad (24)$$

При этих условиях движение параметрически модулированного линейного осциллятора является квазипериодическим, причем одна из частот равна частоте  $\omega$  модуляции параметра, а вторая,  $\Omega$ , близка к частоте колебаний невозмущенного осциллятора, но отличается от нее слагаемым, которое растет с ростом глубины модуляции параметра.

◆ Движение параметрически модулированного линейного осциллятора при частоте модуляции, близкой к удвоенной собственной частоте осциллятора, - в области, где нарушено первое из неравенств (24) - можно описать с помощью метода медленно меняющихся амплитуд. Представим решение в виде

$$x(t) = a(t) \cos \frac{\omega}{2} t + b(t) \sin \frac{\omega}{2} t, \quad (25)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  - медленно меняющиеся амплитуды. Подставляя решение (25) в (18) и приравнявая коэффициенты при  $\cos(\omega t/2)$  и  $\sin(\omega t/2)$ , получаем уравнения для медленных амплитуд:

$$\omega \dot{a} + b \left( \frac{\omega^2}{4} - 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0, \quad (26)$$

$$\omega \dot{b} - a \left( \frac{\omega^2}{4} - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0. \quad (27)$$

Решения этой системы уравнений имеют вид

$$a(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t}, \quad b(t) = B_1 e^{\lambda t} + B_2 e^{-\lambda t} \quad (28)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega^2}{4} - 1\right)^2} \quad (29)$$

Введем расстройку частоты модуляции от удвоенной частоты резонанса  $\Delta = \omega - 2$ . Если  $|\Delta| \ll 1$ , то выражение (29) можно переписать в виде

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \Delta^2} \quad (30)$$

Границы области параметрического резонанса вблизи удвоенной частоты невозмущенного движения - главного параметрического резонанса - определяются соотношением

$$\Delta = \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad (31)$$

Ширина области главного параметрического резонанса пропорциональна глубине модуляции.

Если расстройка по абсолютной величине меньше половины параметра модуляции, то медленно меняющиеся амплитуды  $a(t)$  и  $b(t)$  в общем случае экспоненциально увеличиваются со временем. Экспоненциальный рост амплитуды колебаний в линейных системах с периодической модуляцией параметров называется **параметрическим резонансом**.

### § 12.03 Теорема Флоке

◆ При  $\Delta > \varepsilon/2$  характеристический показатель  $\lambda$  - чисто мнимый, и движение (25) может быть описано как квазипериодическое с фундаментальными частотами  $\omega$  и  $\lambda$ . Частота основной гармоники движения  $\Omega = \omega + |\lambda|$ . При  $\Delta \gg \varepsilon/2$  (ср. неравенства (24)) эта частота приблизительно равна  $\Omega \approx 1 + \varepsilon^2/16\Delta$ , что согласуется с результатом теории возмущений (23).

Отметим, что как внутри, так и вне области параметрического резонанса решение уравнения (18) может быть представлено в виде

$$x(t) = \Phi_1 \exp \lambda_1 t + \Phi_2 \exp \lambda_2 t \quad (32)$$

где функции  $\Phi_k(t)$  - периодические с периодом  $2\pi/\omega$ , а характеристические показатели  $\lambda_k$  вне области устойчивости - чисто мнимые ( $\lambda_k = -\lambda_k^*$ ), а внутри - чисто действительные ( $\lambda_k = \lambda_k^*$ ).

Этот результат есть частный случай утверждения **теоремы Флоке** (G. Floquet, 1883), согласно которой система  $N$  линейных уравнений

$$\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^N w_{ij}^2(t) x_j = 0 \quad (33)$$

( $1 \leq i \leq N$ ), коэффициенты которой  $w_{ij}$  суть периодические функции времени с периодом  $T$ , имеет  $2n$  линейно независимых решений вида  $x_i^{(k)} = \Phi_i^{(k)}(t)e^{\lambda_k t}$ , где функции  $\Phi_i^{(k)}(t)$  - также периодические с периодом  $T$ .

◆ Приведем доказательство теоремы для случая одного уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом

$$\ddot{x} + w^2(t)x = 0 \quad (34)$$

Рассмотрим два линейно независимых решения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  этого уравнения. В силу периодичности коэффициента  $w^2(t)$  функции  $x_k(t+T)$  также являются решениями уравнения (34) и могут быть представлены в виде суперпозиции решений  $x_k(t)$ :

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \mu_1 x_1(t) + \nu_1 x_2(t) \\ x_2(t+T) &= \nu_2 x_1(t) + \mu_2 x_2(t) \end{aligned} \quad (35)$$

Выбирая первоначальные решения так, что  $\nu_k = 0$ , получаем

$$x_k(t+T) = \mu_k x_k(t) \quad (36)$$

Далее, для двух линейно независимых решений уравнений (34) справедливо тождество

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) \equiv 0 \quad (37)$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t)x_2(t) - \dot{x}_2(t)x_1(t) &= \\ &= \dot{x}_1(t+T)x_2(t+T) - \dot{x}_2(t+T)x_1(t+T) = \text{const} \end{aligned} \quad (38)$$

С учетом (36) отсюда получаем  $\mu_1 \mu_2 = 1$ . Вводя для  $\mu_k$  выражения через характеристические показатели,  $\mu_k = \exp \lambda_k T$ , получаем  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$  и

$$x_{1,2}(t) = \Phi_{1,2}(t) \exp \pm \lambda t, \quad (39)$$

что завершает доказательство теоремы. ■

◆ Для уравнения (34) с действительным коэффициентом  $w^2(t)$  решениями являются как функции  $x_k(t)$ , так и комплексно сопряженные им функции  $x_k^*(t)$ , откуда следует, что пара коэффициентов  $\mu_1^*$ ,  $\mu_2^*$  совпадает с парой  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . Это эквивалентно утверждению, что характеристический показатель  $\lambda$  либо чисто действительный, либо чисто мнимый, а на границе области устойчивости параметрического резонанса обращается в нуль.

**§ 12.04 Уточнение границ первой зоны  
и вторая зона параметрического резонанса**

◆ Для уточнения границ зоны устойчивости параметрического резонанса необходимо учесть следующие гармоники в решении (25) - обратиться к представлению решения с большим числом мод (см. § 9.03). Если интересоваться только границами зоны устойчивости, достаточно искать решение в виде суммы тригонометрических функций с постоянными коэффициентами:

$$x(t) = a_1 \cos \frac{\omega}{2} t + b_1 \sin \frac{\omega}{2} t + a_2 \cos \frac{3\omega}{2} t + b_2 \sin \frac{3\omega}{2} t \quad (40)$$

Подставляя (40) в (18) и приравнявая нулю коэффициенты при каждом из косинусов или синусов, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega^2}{4}\right) a_1 + \frac{\varepsilon}{2} (a_1 + a_2) &= 0; & \left(1 - \frac{9\omega^2}{4}\right) a_2 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 &= 0 \\ \left(1 - \frac{\omega^2}{4}\right) b_1 + \frac{\varepsilon}{2} (b_1 - b_2) &= 0; & \left(1 - \frac{9\omega^2}{4}\right) b_2 + \frac{\varepsilon}{2} b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Решая ее, получаем уточненные границы зоны устойчивости:

$$\boxed{\Delta_{2-} = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32}, \quad \Delta_{2+} = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32}} \quad (42)$$

Параметрический резонанс существует в области  $\Delta_{2-} < \omega - 2 < \Delta_{2+}$ .

◆ Рассмотрим теперь область частот  $\omega \approx 1$ , в которой нарушается второе из неравенств (24). Для нахождения границ зоны устойчивости параметрического резонанса в области  $|\Delta| = |\omega - 1| \ll 1$  необходимо искать решение в виде

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t \quad (43)$$

Подставляя (43) в (18) и приравнявая нулю коэффициент при каждой тригонометрической функции, получаем

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 &= 0 \\ (1 - \omega^2) a_1 + \frac{\varepsilon}{2} (2a_0 + a_2) &= 0, & (1 - \omega^2) b_1 + \frac{\varepsilon}{2} b_2 &= 0, \\ (1 - 4\omega^2) a_2 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 &= 0, & (1 - 4\omega^2) b_2 + \frac{\varepsilon}{2} b_1 &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

Решая ее, получаем для зоны параметрического резонанса вблизи единичной частоты следующие значения граничных расстройок:

$$\boxed{\Delta_{1-} = -\frac{5}{24} \varepsilon^2, \quad \Delta_{1+} = \frac{1}{24} \varepsilon^2} \quad (45)$$

◆ Найденные выше границы зон устойчивости параметрического резонанса относятся к консервативной модели параметрически модулированного гармонического осциллятора. Рассмотрим теперь влияние затухания на границы зон параметрического резонанса. Для модели с уравнением движения

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + [1 + \varepsilon \cos \omega t]x = 0 \quad (46)$$

будем искать решение в виде

$$x(t) = a(t) \cos \frac{\omega}{2} t + b(t) \sin \frac{\omega}{2} t \quad (47)$$

При этом затухание будем считать малым:  $\gamma \ll 1, \omega$ . Подставляя выражение (47) в уравнение (46), приравнявая коэффициенты при  $\cos(\omega t/2)$  и  $\sin(\omega t/2)$  и пренебрегая членами вида  $\gamma \dot{a}$ , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega \dot{a} + b \left( \frac{\omega^2}{4} - 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \gamma \omega a &= 0, \\ \omega \dot{b} - a \left( \frac{\omega^2}{4} - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \gamma \omega b &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Отсюда находим значение показателя

$$\lambda = -\gamma + \frac{1}{\omega} \sqrt{\left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 - \left( \frac{\omega^2}{4} - 1 \right)^2} \quad (49)$$

Приравнявая значение показателя нулю, находим положение границ зоны параметрического резонанса:

$$\Delta_{1\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 - 16\gamma^2} \quad (50)$$

Для гармонического осциллятора с затуханием возникновение параметрического резонанса при  $\omega \approx 2$  возможно, только если глубина модуляции превосходит пороговое значение,  $\varepsilon > \varepsilon_{lc} = 4\gamma$ .

◆ Для учета влияния затухания на границы второй зоны параметрического резонанса необходимо, как и в предыдущем пункте, записать уравнения для медленно меняющихся амплитуд, входящих в решение (43). Подставляя (43) в уравнение (46) и приравнявая коэффициенты при каждой из тригонометрических функций, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 &= 0 \\ (1 - \omega^2) a_1 + \frac{\varepsilon}{2} a_2 + \varepsilon a_0 + 2\omega\gamma b_1 + 2\omega \dot{b}_1 &= 0 \\ (1 - \omega^2) b_1 + \frac{\varepsilon}{2} b_2 - 2\omega\gamma a_1 - 2\omega \dot{a}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

$$(1 - 4\omega^2)a_2 + \frac{\varepsilon}{2}a_1 + 4\omega\gamma b_2 + 4\omega\dot{b}_2 = 0$$

$$(1 - 4\omega^2)b_2 + \frac{\varepsilon}{2}b_1 - 4\omega\gamma a_2 - 4\omega\dot{a}_2 = 0$$

Для характеристических показателей  $\lambda$  из этой системы получаем алгебраическое уравнение

$$64\omega^4(\lambda + \gamma)^4 + 4\omega^2(\lambda + \gamma)^2 \left\{ (4\omega^2 - 1)^2 + (\omega^2 - 1)^2 + \varepsilon^2(2\omega^2 - 1)^2 \right\} + (4\omega^2 - 1)^2(\omega^2 - 1)^2 + \varepsilon^2(4\omega^2 - 1)(2\omega^2 - 1)(\omega^2 - 1) - \frac{\varepsilon^4}{16}(8\omega^2 - 3) = 0 \quad (52)$$

Граница зоны параметрического резонанса определяется условием  $\text{Re}\lambda = 0$ , т.е.  $\text{Re}(\lambda + \gamma) = \gamma$ . Однако при  $\gamma > 0$  любые корни этого уравнения с  $\text{Re}(\lambda + \gamma) > 0$  вещественны, так как при  $\gamma = 0$  система (51) переходит в систему (44), определяющую границы зоны параметрического резонанса для осциллятора без затухания. Это позволяет искать границы зоны параметрического резонанса, подставляя в (52)  $\lambda = 0$ . Тогда в первом приближении по  $\varepsilon$  и  $\gamma$  получаем:

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{12} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{64} - \frac{\gamma^2}{9}} \quad (36)$$

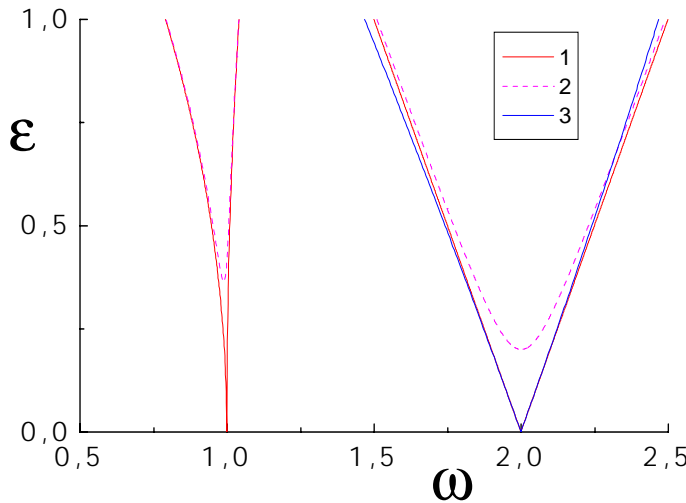


Рис. 12.2

Границы первой и второй зон устойчивости параметрического резонанса в первом приближении для консервативного гармонического осциллятора (18) и гармонического осциллятора с затуханием (25) при значении  $\gamma = 0.05$ . (2). Граница первой зоны устойчивости во втором приближении (42).

Для гармонического осциллятора с затуханием возникновение параметрического резонанса при  $\omega \approx 1$  возможно, только если глубина модуляции превосходит пороговое значение,  $\varepsilon > \varepsilon_{1c} = \sqrt{8\gamma/3}$ . При малых значениях  $\gamma$   $\varepsilon_{1c} \gg \varepsilon_{2c}$  - условия возбуждения параметрического резонанса на единичной частоте существенно более жесткие.

◆◆ Линейный осциллятор с квадратом частоты, изменяющимся по гармоническому закону, всегда совершает "формально квазипериодическое" двухчастотное движение, одна из частот которого равна частоте модуляции,  $\Omega_1 = \omega$ , а вторая,  $\Omega_2$ , может быть как действительной, так и мнимой.

Если частота модуляции  $\omega$  (и ее гармоник  $k\omega$ ) далека от удвоенной частоты движения невозмущенной системы  $2\Omega$ , то система совершает квазипериодическое движение, вторая частота движения которого  $\Omega_2 \approx \Omega$  и слабо зависит от глубины модуляции  $\varepsilon$  (23). Движение системы эффективно описывается суперпозицией нескольких периодических движений [(25) и (40)].

Если частота модуляции  $\omega$  (или ее гармоника  $k\omega$ ) близка к удвоенной частоте движения невозмущенной системы  $2\Omega$ , то движение системы эффективно описывается моделью медленно (экспоненциально) модулированного гармонического движения (28).

Граница между этими двумя случаями определяется шириной параметрического резонанса по частоте [(42), (45)] которая растет с глубиной модуляции; для главного параметрического резонанса ( $\omega \approx 2\Omega$ )  $\Delta\omega \sim \varepsilon$ .