

ЛЕКЦИЯ #09
КОЛЕБАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ
ДИССИПАТИВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗОНАНСЫ

§ 9.01 Устойчивость периодического движения

◆ Для исследования устойчивости периодических колебаний используем метод медленно меняющихся амплитуд. Подставим в уравнение движения

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F \cos\omega t. \quad (1)$$

решение вида

$$x = a \cos\omega t + b \sin\omega t \quad (2)$$

считая, что амплитуды a и b суть **медленно меняющиеся** функции времени. Пренебрегая вторыми производными по времени от a и b и малыми членами второго порядка типа $\gamma\dot{a}$ и $\gamma\dot{b}$ и собирая коэффициенты при функциях $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получим систему уравнений

$$\dot{a} = \frac{1}{2\omega} \left[\left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2 \right) b - 2\gamma\omega a \right], \quad (3)$$

$$\dot{b} = -\frac{1}{2\omega} \left[\left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2 \right) a + 2\gamma\omega b - F \right], \quad (4)$$

Найденные в предыдущей лекции значения a и b описывают неподвижные точки этой системы. Для исследования устойчивости этих точек необходимо вычислить собственные значения матрицы устойчивости \hat{M} (см. §4.03) в этих точках. Для некоторого упрощения выражений выберем в качестве единицы времени величину $T = (2\omega)^{-1}$. Вычисляя элементы матрицы \hat{M} , получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\gamma\omega\lambda + \frac{27}{16} A^4 + 3A^2(1 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2 + (1 - \omega^2)^2 = 0 \quad (5)$$

где $A^2 = a^2 + b^2$. Неподвижные точки, для которых собственные значения матрицы устойчивости определяются уравнением

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (6)$$

неустойчивы, если хотя бы одно собственное значение имеет **положительную действительную часть**. Следовательно, область неустойчивости есть **объединение** областей, в которых $p < 0$ или $q < 0$. Для уравнения (5) это приводит к выражениям для границ областей неустойчивости

$$4\gamma\omega = 0 \quad (7)$$

и

$$\frac{27}{16}A^4 + 3A^2(1-\omega^2) + 4\gamma^2\omega^2 + (1-\omega^2)^2 = 0 \quad (8)$$

Уравнение (7) не приводит к содержательным ограничениям. Уравнение (8) описывает гиперболу на плоскости "переменная - параметр" $\{A, \omega\}$ кривую, имеющую вид искривленной параболы.

Уравнение (8) **совпадает** с полученным в § 8.04 уравнением (33), определяющим бифуркационные значения частоты ω_{\pm} . Таким образом, точки бифуркации всегда лежат на границе области устойчивости стационарных значений амплитуд, заданной уравнением (8). Поэтому в области параметров, где амплитуда периодических колебаний имеет три возможных значения, максимальное и минимальное соответствуют устойчивым периодическим движениям, а промежуточное - неустойчивому.

Таким образом, мы доказали, что в интервале частот $\omega_- < \omega < \omega_+$ осциллятор Дуффинга с малым затуханием, находящийся под действием внешней силы, зависящей от времени по гармоническому закону, является бистабильной системой.

§ 9.02 Уточнение решения: третья гармоника

◆ В предыдущей лекции мы представляли решение в виде

$$x_0(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t. \quad (9)$$

Уточним теперь это решение, представив закон движения в виде

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t) \quad (10)$$

где $\xi(t)$ - малая поправка. Подставив это решение в (1) и учитывая, что при определении (9) учтены все члены на первой гармонике, для поправки получим уравнение

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \xi = \frac{1}{4}(a^3 - 3ab^2)\cos 3\omega t + \frac{1}{4}(3a^2b - b^3)\sin 3\omega t \quad (11)$$

Это - уравнение колебаний линейного осциллятора с вязким трением под действием гармонической силы. Его решение, которое можно представить в виде

$$\xi(t) = c \cos 3\omega t + d \sin 3\omega t, \quad (12)$$

определяет третью гармонику в законе движения нелинейного осциллятора при установившихся колебаниях под действием гармонической силы. Подставляя решение (12) в (11) и приравнявая коэффициенты при $\cos 3\omega t$ и $\sin 3\omega t$, получаем систему линейных уравнений

$$(1 - 9\omega^2)c + 6\gamma\omega d = \frac{1}{4}(a^3 - 3ab^2) \quad (13)$$

$$(1 - 9\omega^2)d - 6\gamma\omega c = \frac{1}{4}(3a^2b - b^3) \quad (14)$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, для амплитуды $C = \sqrt{c^2 + d^2}$ третьей гармоники установившихся колебаний получаем выражение

$$C = \frac{A^3}{4\sqrt{(9\omega^2 - 1)^2 + 36\gamma^2\omega^2}} \quad (15)$$

где A - амплитуда первой гармоники колебаний. Отношение C/A всегда мало: так, в условиях примера, показанного на рис. 08.1 $C/A \leq 0.0442$; расчет по формуле (15) дает $C/A \leq 0.0293$. Поэтому пренебрежение высшими гармониками при выводе уравнений для a и b оправдано, а основанные на них расчеты имеют достаточно высокую точность. Из формулы (15) видно, что предположение о малости отношения C/A может быть нарушено при $\omega \approx 1/3$ и достаточно малом затухании, когда знаменатель правой части становится мал. Этот случай супергармонического резонанса должен быть рассмотрен отдельно.

◆◆ Для описания периодического движения в диссипативной системе под периодическим воздействием эффективны простейшие кинематические модели - гармонического колебания (9), медленно модулированного гармонического колебания (2) и слабо ангармонического периодического колебания (10).

Необходимое для исследования устойчивости движения использование модели медленно модулированного гармонического колебания сводит задачу к модели двумерной автономной системы, которая изучается известными методами (см. L04).

§ 9.03 Моды и конечномодовые приближения

◆ Если закон движения $x(t)$ представляется в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^M A_k f_k(t) \quad (16)$$

где $f_k(t)$ - известные функции, то

- эти функции называются **модами** (от латинского *modus*: здесь - тип, образец);

- коэффициенты A_k называются **амплитудами мод**,

- параметр M называется **числом мод**,

- форма (16) называется **M -модовым приближением**.

◆ Для описания свойств диссипативного нелинейного резонанса в системе

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F \cos\omega t. \quad (17)$$

в L08 мы использовали двухмодовое синхронное приближение

$$x_0(t) = a \cos\omega t + b \sin\omega t. \quad (18)$$

в котором частоты мод **совпадали** с частотой внешнего воздействия. Стандартная процедура подстановки (18) в уравнение движения (17), фурье-разложения и приравнивания коэффициентов при модах приводят к системе "кубических" (трилинейных) уравнений (08.23), (08.24), решения которых отыскивались с помощью искусственных приемов. В §9.02 решение (18) было уточнено с помощью теории возмущений - добавлены **малые** члены с утроенной частотой.

◆ Найденное таким способом решение не описывает всех возможных периодических движений в системе (17). Во-первых, частота движения Ω может составлять кратную долю частоты воздействия ω , $n\Omega = \omega$ - так называемый субгармонический резонанс порядка n (важнейшим для модели (2) является случай $n = 3$). Во-вторых, выбор в качестве нулевого приближения двухмодового синхронного приближения (18) предполагает малость амплитуд отброшенных высших гармоник. Это предположение может нарушаться, если частота движения Ω кратна частоте воздействия ω - так называемый супергармонический резонанс порядка n $\Omega = n\omega$ (важнейшим для модели (2) является случай $n = 3$: см. (15)). Описание соответствующих законов движения, существенно отличающихся от найденных в L08, возможно при использовании четырехмодового приближения

$$x_0(t) = a \cos\omega t + b \sin\omega t + c \cos 3\omega t + d \sin 3\omega t \quad (19)$$

и записи возмущения в виде $F \cos 3\omega t$ для субгармонического и $F \cos\omega t$ для супергармонического случаев. Прямое использование стандартной процедуры приведет к системе четырех трилинейных уравнений для амплитуд a, b, c и d . Исключение всех переменных кроме одной (например, a) даст для a уравнение высокой (81-й ?) степени, исследование которого аналитическими средствами безнадежно, а численными - обременительно. Задача упрощается в случае, когда затухание γ можно считать пренебрежимо малым параметром. Поскольку амплитуды квадратурных компонент b и d при этом оказываются малы (обращаются в ноль при $\gamma \rightarrow 0$), в качестве нулевого можно использовать двухмодовое приближение

$$x_0(t) = a \cos\omega t + c \cos 3\omega t. \quad (20)$$

Основываясь на этом, в следующих параграфах мы исследуем простейшие движения в субгармоническом и супергармоническом резонансах модели (17).

§ 9.04 Субгармонический резонанс в диссипативном осцилляторе Дуффинга: пренебрежимо малое затухание

◆ **Субгармоническим резонансом** порядка n в неавтономной системе с периодическим воздействием называется область параметров, в которой существует периодическое движение с частотой в n раз **меньше** частоты поля. Рассмотрим субгармонический резонанс третьего порядка для диссипативного осциллятора Дуффинга, уравнение движения которого запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F \cos 3\omega t, \quad (21)$$

чтобы сохранить обозначение ω за частотой движения. В дальнейшем мы будем считать силу умеренной, $F \leq 1$, и будем рассматривать область частот, недалеко отстоящих от частоты малых колебаний: $0 \leq \omega^2 - 1 \leq 1$.

◆ Начнем со случая, когда затухание γ можно считать пренебрежимо малым. Тогда решение уравнения

$$\ddot{x} + x + x^3 = F \cos 3\omega t \quad (22)$$

можно представить в виде суперпозиции первой и третьей гармоники

$$x(t) = \xi(t) + \eta(t) = a \cos \omega t + c \cos 3\omega t, \quad (23)$$

пренебрегая сдвинутыми по фазам компонентами. В нулевом приближении пренебрежем нелинейным членом в левой части (22). Тогда компоненту с частотой 3ω можно описать как вынужденные колебания линейного осциллятора с пренебрежимо малым затуханием:

$$\eta(t) = c \cos 3\omega t = -\frac{F}{9\omega^2 - 1} \cos 3\omega t \quad (24)$$

Подставив решение в виде $x(t) = \xi(t) + \eta(t)$ в уравнение (22), для функции $\xi(t)$ получим уравнение

$$\ddot{\xi} + \xi + \xi^3 = -\eta^3 - 3\eta^2\xi - 3\eta\xi^2 \quad (25)$$

Подставляя в правую часть выражения для $\xi(t)$ и $\eta(t)$ (24) и сохраняя только члены с частотой ω , получим уравнение

$$\ddot{\xi} + \xi + \xi^3 = -\frac{3}{4}(2ac^2 - a^2c) \cos \omega t \quad (26)$$

Теперь задача определения движения свелась к рассмотренной ранее (L08) задаче о движении нелинейного осциллятора Дуффинга (с пренебрежимо малым затуханием) с амплитудой силы

$$\tilde{F} = -\frac{3}{4}(2ac^2 - a^2c) \quad (27)$$

Из уравнения (25) (ср. (08.23)) получаем квадратное уравнение для a

$$1 + \frac{3}{4}a^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}c(2c - a) = 0 \quad (28)$$

корни которого даются формулой

$$a = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{3}(\omega^2 - 1) - \frac{7}{4}c^2} \quad (29)$$

♦ Методом, использованным в §9.01, можно показать, что устойчивым является только решение, которому соответствует знак "−" перед корнем: соответствующая амплитуда всегда отрицательна.

Корни уравнения (29) вещественны, если частота возмущения 3ω превосходит пороговую частоту, приближенно равную

$$3\omega_c = 3 \left(1 + \frac{21}{2048} F^2 \right) \quad (30)$$

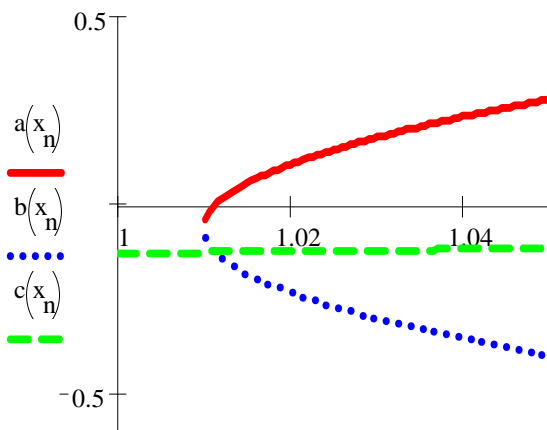


Рис. 09.1

Зависимости амплитуд первой (сплошная и пунктирная линии) и третьей (штриховая линия) гармоник движения вблизи порога субгармонического резонанса в осцилляторе Дуффинга с пренебрежимо малым трением при $F = 1$.

Из условия положительности подкоренного выражения в (29) получаем также границу области существования субгармонического резонанса на плоскости переменных $\{F, \omega\}$ в системе с пренебрежимо малым трением: такой резонанс существует при $\omega > 1$, если сила не превосходит значения

$$F_l = \frac{4}{\sqrt{21}} \sqrt{\omega^2 - 1} (9\omega^2 - 1) \approx 6.983 \sqrt{\omega^2 - 1} \quad (31)$$

На пороге субгармонического резонанса амплитуда первой гармоники **конечна** и равна половине амплитуды третьей гармоники - коэффициент ангармонизма колебаний $\nu = 4$. (см. L01, рис. 01.2).

§ 9.05 Субгармонический резонанс в диссипативном осцилляторе Дуффинга: конечное затухание

◆ Рассмотрим теперь субгармонический резонанс с учетом конечной величины затухания. Движение можно приближенно описать законом

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + c \cos 3\omega t \quad (32)$$

Поскольку с ростом частоты амплитуда первой гармоники быстро растет, а амплитуда третьей медленно падает, можно пренебречь в выражении для возмущающей силы (27) первым слагаемым и рассмотреть задачу о движении диссипативного осциллятора Дуффинга под действием вынуждающей силы

$$\tilde{F} = \frac{3}{4} A^2 c \quad (33)$$

где A - фурье-амплитуда первой гармоники движения ($A^2 = a^2 + b^2$). Из уравнения (08.25) получаем

$$\left(1 + \frac{3}{4} A^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + 4\gamma^2 \omega^2 A^2 = \frac{9}{16} A^4 c^2 \quad (34)$$

◇ Возможность использовать это уравнение оправдана предположением о малости затухания. Поэтому амплитуда квадратурной компоненты мала, $b \ll a$, и можно пренебречь в правой части членом, пропорциональным abc , по сравнению с $a^2 c$.

Нетривиальные (отличные от нуля) корни уравнения (18) определяются биквадратным уравнением, которое подстановкой $z = A^2$ сводится к квадратному

$$z^2 + z \left[\frac{8}{3} (1 - \omega^2) - c^2 \right] + \frac{16}{9} (1 - \omega^2)^2 + \frac{64}{9} \gamma^2 \omega^2 = 0 \quad (35)$$

Корни этого уравнения вещественны, если положителен дискриминант

$$D(F, \omega) = c^4 + \frac{16}{3} c^2 (\omega^2 - 1) - \frac{256}{9} \gamma^2 \omega^2 \quad (36)$$

Поскольку в области, которую мы исследуем, $c \ll 1$, то первым членом в этом выражении можно пренебречь. Тогда условие положительности дискриминанта приобретает вид

$$c^2 (\omega^2 - 1) \geq \frac{16}{3} \gamma^2 \omega^2 \quad (37)$$

Используя выражение (24) для c , находим, что уравнение (35) имеет вещественные корни, если сила больше значения

$$F_- = \gamma \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}} (9\omega^2 - 1) = \gamma \Phi(\omega) \quad (38)$$

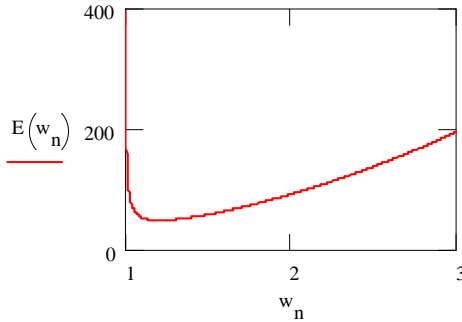


Рис. 09.2

Функция $\Phi(\omega)$, определяющая границу области существования субгармонического резонанса в диссипативном осцилляторе Дуффинга.

Функция $\Phi(\omega)$ в правой части (38) при значении частоты

$$\omega_- = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{73}}{12}} = 1.209 \quad (39)$$

имеет минимум, равный $\Phi(\omega_-) = 49.948$. Таким образом, для возникновения субгармонического резонанса в системе с затуханием амплитуда внешней силы должна превосходить критическое значение

$$\boxed{F_c = 50\gamma}. \quad (40)$$

Если $F \gg F_c$, то, используя асимптотики функции F_-

$$F_- \approx \gamma \frac{32}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega - 1}} \quad (\omega - 1 \ll 1) \quad (41)$$

$$F_- \approx \gamma \frac{36}{\sqrt{3}} \cdot \omega^2 \quad (\omega \gg 1) \quad (42)$$

можно найти границы области субгармонического резонанса. Такой резонанс существует в полосе частот $\omega_L < \omega < \omega_R$, где

$$\boxed{\omega_L \approx 1 + \frac{1}{14.6} \left(\frac{F_c}{F} \right)^2, \quad \omega_R \approx 1.55 \sqrt{\frac{F}{F_c}}} \quad (43)$$

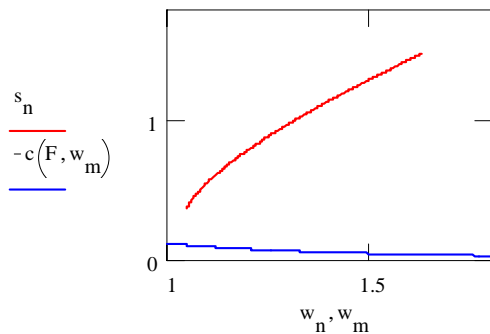


Рис. 09.3

Фурье-амплитуды первой (верхняя линия) и третьей (нижняя линия) гармоник движения при субгармоническом резонансе в осцилляторе Дуффинга с $\gamma = 0.015$ и $F = 1.0 = 1.33F_c$. Резонанс существует при $1.05 \leq \omega \leq 1.62$.

Амплитуда первой гармоники конечна всюду в области существования резонанса и всюду, как и было предположено при выводе формулы (33), существенно превосходит амплитуду третьей гармоники. Отметим, что в условиях рассматри-

ваемого примера зависимость $A(\omega)$, заданная уравнением (34), **во всей** области субгармонического резонанса **хорошо** описывается полученной в пренебрежении затуханием формулой (29): средняя относительная погрешность такого приближения равна 0.7%.

◆ Отметим, что в области существования субгармонического резонанса третьего порядка обязательно существует также устойчивое решение, соответствующее нижней (нерезонансной) ветви нелинейного резонанса, рассмотренного в L08.

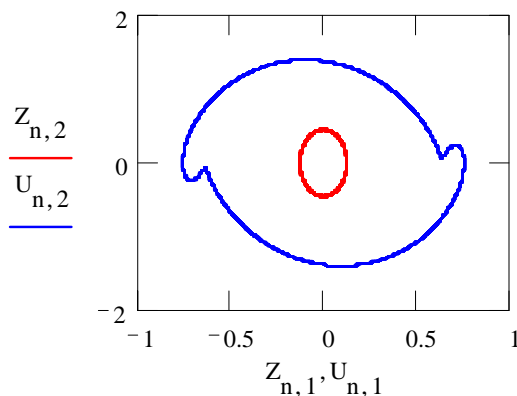


Рис. 09.4

Проекция на фазовую плоскость $x - \dot{x}$ фазовых траекторий периодических движений осциллятора Дуффинга с $\gamma = 0.015$ и $F = 1.5$ и $\omega = 1.2$. Внутренняя линия - нерезонансное движение, внешняя - движение в субгармоническом резонансе.

Хотя фурье-амплитуды этих движений на частоте действующей силы (3ω) близки, движение в субгармоническом резонансе проходит в существенно более обширной области фазового пространства (см. рис. 09.4). Кроме того, эти решения сильно различаются по степени ангармонизма.

◆◆ Для описания периодических движений типа субгармонического резонанса в диссипативном осцилляторе Дуффинга под периодическим воздействием в случае пренебрежимо малого затухания эффективно использование двухмодового приближения (23).

В этом приближении возможно последовательное определение амплитуд - амплитуда нерезонансной моды находится из модели линейного осциллятора (24), после чего задача сводится к исследованию основного нелинейного резонанса под воздействием возмущения, величина которого зависит от амплитуд мод [(27) и (33)], что позволяет определить амплитуду резонансной моды решением квадратных уравнений [(28) и (35)].

Хотя такой подход есть суррогат самосогласованного решения системы уравнений для всех учтенных амплитуд мод, его результаты достаточно точны.