

ЛЕКЦИЯ #08

ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ - 3

КОЛЕБАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ: ДИССИПАТИВНЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС

§ 8.01 Общие условия существования предельных циклов

◆ Предельные циклы осциллятора Рэля и брюсселятора окружают неподвижные точки этих систем; внутри этих предельных циклов диссипация меняет знак. Оба этих свойства являются общими (что будет показано в этом параграфе) и могут быть использованы при исследовании условий существования предельных циклов.

◆ Пусть $\vec{V}(x, y)$ есть векторное поле на плоскости и S - замкнутая кривая (контур) на ней. Величина угла поворота вектора \vec{V} поля при обходе по контуру, деленная на 2π , называется **индексом замкнутой кривой** по отношению к векторному полю.

✧ Обход контура проводится в положительном направлении - против часовой стрелки. Это же направление вращения вектора считается положительным.

Уравнения движения автономной двумерной системы

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (1)$$

задают в каждой точке фазовой плоскости векторное поле локальной скорости $\vec{V}(x, y) = \{\dot{x}, \dot{y}\}$. В соответствии с определением индекс кривой S дается выражением

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_S d \left\{ \arctg \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \right\} \quad (2)$$

Если внутри области, охватываемой кривой S , подынтегральная функция и ее производные существуют и непрерывны, то этот интеграл равен нулю. Непрерывность подынтегральной функции и ее производной может нарушаться только в особых точках, где одновременно $G(x, y) = 0$ и $F(x, y) = 0$. Эти точки являются неподвижными точками системы (1).

Индексом особой точки называется индекс простой замкнутой кривой, охватывающей эту и только эту особую точку. Легко убедиться, что индекс не зависит от формы и положения кривой S . Для седловой особой точки $j = -1$, а для узла, фокуса и центра $j = +1$.

Легко показать, что индекс замкнутой кривой равен сумме индексов находящихся внутри нее особых точек. Если кривая S является замкнутой фазовой траекторией, то ее индекс $j = +1$. Следовательно,

Внутри предельного цикла динамической системы (1) находится по меньшей мере одна неподвижная точка системы, при этом не являющаяся седлом.

◆ Пусть S - замкнутая фазовая траектория на плоскости, и A - ее внутренняя область. Проинтегрируем по области A величину диссипации системы (см. §2.03)

$$\Lambda(\vec{x}) = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}. \quad (3)$$

По формуле Грина, интеграл может быть сведен к криволинейному:

$$-\iint_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = -\oint_S (F dy - G dx). \quad (4)$$

Поскольку на фазовой траектории в силу уравнений движения величина $F dy - G dx = 0$, то интеграл в правой части равен нулю. Следовательно, интеграл от диссипации по внутренней области, границей которой является фазовая траектория, обращается в ноль:

$$\iint_A \Lambda(\vec{x}) dx dy = 0. \quad (5)$$

Если в некоторой односвязной области фазовой плоскости диссипация $\Lambda(\vec{x})$ не равна тождественно нулю и не меняет знака, то в этой области нет замкнутых фазовых траекторий системы - нет предельных циклов.

Это утверждение называется **критерием Бендиксона** для существования предельных циклов.

◆◆ Необходимые условия наличия предельных циклов состоят в наличии неподвижных точек с $D > 0$ и знакопеременности диссипации.

Достаточные условия в общем виде неизвестны: для обнаружения всех предельных циклов двумерной автономной системы надлежит провести полное исследование ее глобального фазового портрета.

§ 8.02 Бифуркации рождения предельного цикла

◆ Предельные циклы в динамических системах в общем случае существуют не при произвольных значениях параметров, а возникают при переходе параметра через критическое значение в результате бифуркаций.

Для осциллятора Рэлея при переходе управляющего параметра α через бифуркационное значение $\alpha_c = 0$ скачком возникает цикл конечного размера - амплитуда автоколебаний вблизи точки бифуркации имеет конечную величину: $A \sim 1$. Такое поведение автоколебательной системы при изменении параметра называется **жестким режимом возбуждения автоколебаний**.

◆ При другой параметризации модели иной оказывается и бифуркация. Рассмотрим уравнение для осциллятора Рэлея в форме

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(\lambda - \dot{x}^2) + x = 0 \quad (6)$$

с управляющим параметром λ . Пусть $\alpha \ll 1$: положим, что решение имеет тот же вид, что и при $\alpha = 0$:

$$x(t) = A \sin t. \quad (7)$$

Величину амплитуды A определим, потребовав, чтобы работа силы трения за период равнялась нулю:

$$\Delta E = \int_0^{2\pi} [\alpha \dot{x}(1 - \dot{x}^2)] \cdot \dot{x} dt = 0. \quad (8)$$

Подстановка (7) в (8) дает два решения,

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \sqrt{\frac{4}{3}\lambda}. \quad (9)$$

При $\lambda < 0$ решение A_1 устойчиво. При $\lambda > 0$ устойчиво решение A_2 .

Если при изменении управляющего параметра λ в области $\lambda < \lambda_H$ существует устойчивая неподвижная точка, при $\lambda > \lambda_H$ неподвижная точка неустойчива, а аттрактором является близкий к ней устойчивый предельный цикл, то в точке λ_H происходит **бифуркация Хопфа**.

В приведенном примере при $\lambda = 0$ происходит бифуркация Хопфа. Амплитуда автоколебаний вблизи точки бифуркации имеет сколь угодно малую величину: $A \sim \sqrt{\lambda}$. Такое поведение автоколебательной системы при изменении параметра называется **мягким режимом возбуждения автоколебаний**.

◆ Приведенные примеры не исчерпывают всех возможных способов рождения предельного цикла. Укажем еще один механизм, относящийся к жесткому режиму возбуждения автоколебаний. При таком способе в критической точке одновременно рождаются два совпадающих предельных цикла конечного размера - устойчивый и неустойчивый.

Примером системы является автогенератор с уравнением движения

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2 + \beta x^4)\dot{x} + x = 0 \quad (10)$$

представляющая обобщение осциллятора Ван дер Поля и переходящая в него при значении $\beta = 0$. В дальнейшем мы будем предполагать значение α положительным и малым, $0 < \alpha \ll 1$, и рассматривать β как управляющий параметр.

Полагая $x(t) = A(t)\cos t$, где $A(t)$ - медленно меняющаяся со временем амплитуда, найдем для последней уравнение

$$\dot{A} = -\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{4}A^2 + \frac{\beta}{8}A^4 \right) A \quad (11)$$

При $0 < \beta < 1/8$ это уравнение имеет, кроме неустойчивого тривиального решения ($A_0 = 0$) два стационарных нетривиальных решения с амплитудами

$$A_{1,2} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\beta}}{\beta}} \quad (12)$$

Устойчивым является только решение с большей амплитудой. Этим доставляется еще один пример **жесткого режима возбуждения автоколебаний**.

§ 8.03 Неавтономные системы: силовое и параметрическое воздействия

◆ Модели неавтономных динамических систем обычно вводятся для описания изменяющегося со временем воздействия на некоторую автономную динамическую систему со стороны ее окружения. Пусть исходные уравнения движения невозмущенной автономной системы имеют вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{a}, \vec{x}) \quad (13)$$

где \vec{x} - вектор состояния, \vec{a} - вектор параметров. Принято называть исходную систему (13) **невозмущенной**, а воздействие на нее называть **возмущением**. Как правило, учет воздействия окружения приводит к тому, что параметры невозмущенной системы становятся заданными функциями времени, а к правым частям уравнений движения добавляются дополнительные члены, описывающие возмущение: уравнения движения приобретают вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{a}(t), \vec{x}) + \vec{f}(\vec{b}, \vec{x}, t) \quad (14)$$

где \vec{b} - вектор параметров возмущения.

При анализе таких задач принято выделять два предельных случая. Если параметры исходных уравнений движения остаются неизменными, а воздействие на систему может быть описано только дополнительными членами - возмущениями \vec{f} :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{a}, \vec{x}) + \vec{f}(\vec{b}, \vec{x}, t), \quad (15)$$

то воздействие на систему называется **силовым**. Если же воздействие на систему может быть описано только введением зависимости параметров в невозмущенных уравнениях движения от времени,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{a}(t), \vec{x}), \quad (16)$$

то такое воздействие называется **параметрическим**. Такое разделение удобно, хотя в определенной мере условно.

♦ **Пример 1.** Для невозмущенной модели гармонического осциллятора с уравнением движения $\ddot{q} + \Omega^2 q = 0$ параметрическое воздействие, приводящее к изменению частоты и к уравнению движения

$$\ddot{q} + \Omega^2 [1 + \varepsilon \cos \omega t] q = 0, \quad (17)$$

может быть также описано моделью осциллятора с силовым воздействием

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = -\Omega^2 \varepsilon \cos \omega t q. \quad (18)$$

♦ **Пример 2.** Рассмотрим математический маятник, у которого частица несет электрический заряд e , помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}(t)$, сохраняющей постоянное направление (под углом Θ к направлению силы тяжести), но изменяющееся со временем по величине. Уравнение движения для этой системы таково:

$$ml\ddot{\varphi} + (mg + eE(t) \cos \Theta) \sin \varphi = eE(t) \sin \Theta \cos \varphi \quad (19)$$

При $\Theta = 0$ воздействие электрического поля на систему является параметрическим, а при $\Theta = \pi/2$ - силовым. При промежуточных углах оно имеет общий вид (14).

♦ Наиболее важными в теории неавтономных систем являются задачи о периодическом воздействии. Мы ограничимся рассмотрением случаев, когда внешнее воздействие изменяется во времени по гармоническому закону,

$$z(t) = Z \cos \omega t. \quad (20)$$

Если аттракторами невозмущенной системы являются только положения равновесия, то установившимися движениями возмущенной системы под гармоническим воздействием являются, как правило, периодические движения с частотой, равной частоте воздействия, или близкие к ним движения. В этом случае основной задачей является исследование зависимости характеристик периодического движения - его фурье-амплитуд - от амплитуды Z и частоты ω воздействия $Z - \omega$.

Если установившееся движение невозмущенной системы является периодическим - с частотой, зависящей от начальных условий (как для интегрируемых систем) или с частотой, зависящей только от параметров системы (как для систем с устойчивым предельным циклом), то в ней под действием гармонического возмущения могут существовать как периодические (одночастотные), так и квазипериодические (двухчастотные) движения. Для таких систем основной задачей является разделение пространства параметров $(Z - \omega)$ на области с периодическим и квазипериодическим движением, и исследование их характеристик.

Последовательность нашего изложения в последующих разделах будет такова. Вначале мы рассмотрим задачи исследования установившегося периодического движения с частотой внешнего воздействия. При этом будет продемонстрировано явление *динамической* мультистабильности - возможность в определенных областях параметров наличия двух или нескольких различных устойчивых *движений* с одной и той же частотой.

Затем мы обратимся к исследованию систем, в которых возможны квазипериодические движения - и рассмотрим такие движения сначала в системах, которые в отсутствие возмущения являются интегрируемыми, а затем в системах с предельным циклом.

§ 8.04 *Нелинейный резонанс в диссипативном осцилляторе Дуффинга*

◆ В качестве примера периодических колебаний в неавтономной системе с одной степенью свободы рассмотрим задачу о движении осциллятора Дуффинга D_{1+} с затуханием под действием гармонической силы. Уравнение движения такой системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + x^3 = F \cos\omega t. \quad (21)$$

Эта модель характеризуется тремя параметрами - γ, F и ω . Далее мы будем считать затухание γ фиксированным **малым** параметром, а амплитуду внешней силы F и частоту воздействия ω - управляющими параметрами.

◆ Представим периодическое решение в виде суперпозиции сдвинутых по фазе на $\pi/2$ гармонических колебаний с частотой, равной частоте возмущения:

$$x_0(t) = a \cos\omega t + b \sin\omega t. \quad (22)$$

Подставляя решение (22) в уравнение (21) и приравнявая коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, приходим к системе уравнений

$$\left(1 + \frac{3}{4}A^2 - \omega^2\right)a + 2\gamma\omega b = F, \quad (23)$$

$$\left(1 + \frac{3}{4}A^2 - \omega^2\right)b - 2\gamma\omega a = 0, \quad (24)$$

где $A^2 = a^2 + b^2$. Возводя (23) и (24) в квадрат и складывая, получаем уравнение для квадрата амплитуды первой гармоники вынужденных колебаний A^2

$$\left(1 + \frac{3}{4}A^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + 4\gamma^2\omega^2 A^2 = F^2 \quad (25)$$

Это - кубическое уравнение относительно величины $z = A^2$. В зависимости от значений параметров оно может иметь один или три вещественных корня. Важную роль играют критические значения параметров F_c и ω_c , при которых все три вещественных корня совпадают. Обозначим это значение ζ . Полагая

$$\left(1 + \frac{3}{4}z - \omega_c^2\right)^2 z + 4\gamma^2\omega_c^2 z - F_c^2 = \frac{9}{16}(z - \zeta)^3 \quad (26)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем следующую систему уравнений:

$$-3\zeta = \frac{8}{3}(1 - \omega_c^2), \quad (27)$$

$$3\zeta^2 = \frac{16}{9}(1 - \omega_c^2)^2 + \frac{64}{9}\gamma^2\omega_c^2, \quad (28)$$

$$-\zeta^3 = -\frac{16}{9}F_c^2. \quad (29)$$

Исключая ζ из уравнений (27) и (28), находим для значения критической частоты выражение

$$\omega_c^2 = 1 + 6\gamma^2 + \sqrt{36\gamma^4 + 12\gamma^2}. \quad (30)$$

Из уравнений (27) и (29) с помощью (30) находим критическое значение амплитуды внешней силы:

$$F_c = \frac{16}{9} \left(3\gamma^2 + \sqrt{9\gamma^4 + 3\gamma^2} \right)^{3/2}. \quad (31)$$

При малых значениях затухания γ выражения (30) и (31) упрощаются:

$$\boxed{\omega_c \approx 1 + 2\sqrt{3}\gamma, \quad F_c \approx 4.052 \gamma^{3/2}}. \quad (32)$$

Если амплитуда внешней силы превосходит критическое значение F_c , то кубическое уравнение (2ζ6) может иметь три действительных положительных корня - в некотором интервале частот в системе возможны периодические (с частотой внешнего воздействия) колебания с **тремя** различными значениями амплитуды. Ниже мы покажем, что только **два** из этих значений амплитуды соответствуют устойчивым движениям. Диссипативный осциллятор Дуффинга при этом является **бистабильной** системой.

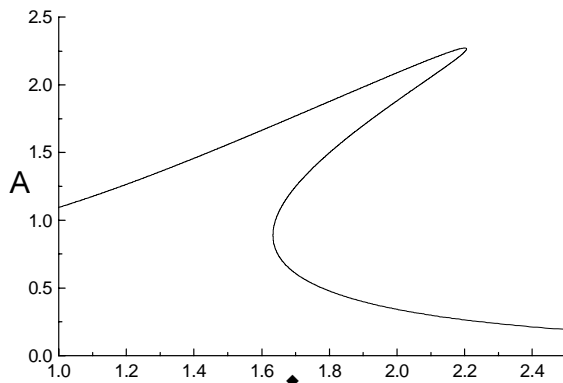


Рис. 08.1

Зависимость амплитуды A периодических колебаний диссипативного осциллятора Дуффинга D_{1+} от частоты Ω при значениях параметров $\gamma = 0.1$ и $F = 1.0 = 7.80F_c$. Результаты, полученные при численном решении уравнения движения (21), отличаются от полученных по формуле (26), не более чем на 2%.

143.0 9359.1 1106 -3 1242.

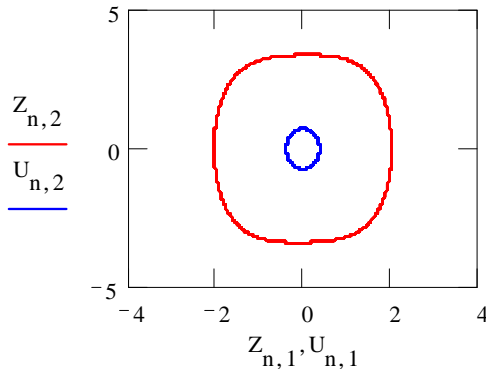


Рис. 08.2

Проекция на фазовую плоскость $\{x, \dot{x}\}$ фазовых траекторий периодических движений осциллятора Дуффинга с $\gamma = 0.1$ и $F = 1.0$ и $\omega = 1.92$. Внутренняя линия - нерезонансное колебание, внешняя - резонансное.

§ 8.05 Границы нелинейного резонанса в диссипативной системе

◆ Найдём границы частотного интервала, в котором система является бистабильной, при $F > F_c$. На этих границах касательная к кривой $A(\omega)$ вертикальна, а следовательно, производная $dA/d\omega$ обращается в бесконечность. Дифференцируя уравнение (25) по ω и приравнявая нулю коэффициент при $dA/d\omega$, получаем уравнение

$$\frac{27}{16}z^2 + 3(1 - \omega^2)z + 4\gamma^2\omega^2 + (1 - \omega^2)^2 = 0 \quad (33)$$

Совместное решение уравнения (33) и уравнения (26), которое мы перепишем в виде

$$\left(1 + \frac{3}{4}z - \omega^2\right)^2 z + 4\gamma^2\omega^2 z = F^2 \quad (34)$$

при заданных значениях γ и F определяет значения частот, соответствующих границам интервала бистабильности.

◆ Найдём приближенные выражения для этих границ при малом затухании γ . Пренебрежем в уравнении (21) членом, содержащим γ . Тогда корни упрощенного уравнения суть

$$z_1 = \frac{4}{9}(\omega^2 - 1), \quad z_2 = \frac{4}{3}(\omega^2 - 1) \quad (35)$$

Начнем с границы бистабильности, которая определяется (при $\omega \gg 1$) вторым корнем z_2 . При этом значении z первая скобка в (34) обращается в ноль, и остается уравнение

$$4\gamma^2\omega^2 z_2 = F^2 \quad (36)$$

Исключая z_2 из соотношений (35) и (36), находим выражение для границы области бистабильности:

$$F_+ = \frac{4}{\sqrt{3}}\gamma\omega\sqrt{\omega^2 - 1} \quad (37)$$

Разрешая это уравнение относительно ω , находим выражение для верхней частотной границы нелинейного резонанса:

$$\boxed{\omega_+ \approx \frac{3^{1/4}}{2} \sqrt{\frac{F}{\gamma}}} \quad (38)$$

◆ Вторая граница области бистабильности определяется корнем z_1 (35а). Подставляя его в первую скобку уравнения (34), получаем

$$\frac{4}{9}(\omega^2 - 1)^2 z_1 + 4\gamma^2 z_1 = F^2, \quad (39)$$

откуда

$$z_1 = \frac{9F^2}{36\gamma^2 + 4(\omega^2 - 1)^2} \quad (40)$$

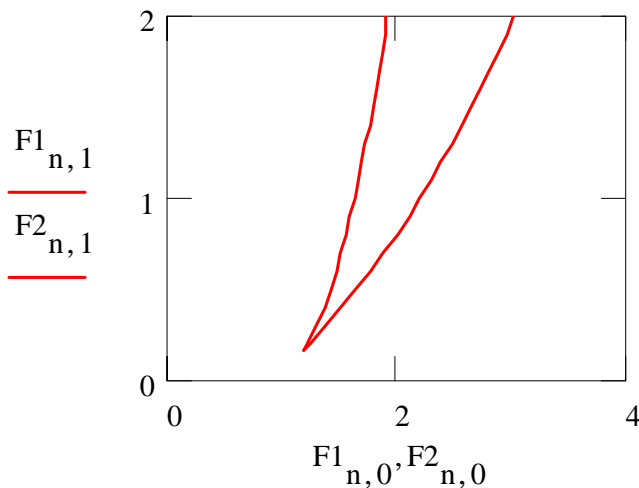


Рис. 08.3

Границы области бистабильности периодических колебаний диссипативного осциллятора Дуффинга D_{1+} на плоскости $F - \omega$ при значении затухания $\delta = 0.1$, найденные численным решением системы уравнений (33) и (34). Область бистабильности лежит **между** границами, сходящимися в точке $\{\omega_c, F_c\}$.

Исключая z_1 из (35а) и (40), находим выражение для второй границы области бистабильности

$$F_- = \frac{4}{9} \sqrt{\omega^2 - 1} \sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + 9\gamma^2} \quad (41)$$

Разрешая его относительно ω при малых γ , находим выражение для нижней частотной границы нелинейного резонанса:

$$\boxed{\omega_- \approx \sqrt{1 + 1.72F^{2/3}}} \quad (42)$$

Использованный подход теряет применимость, если величина силы близка к критическому значению F_c , однако этот случай может быть рассмотрен отдельно.

