ЛЕКЦИЯ #07
ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ
С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ - 2

ТЕСТ #3

§ 7.01 Свойства автоколебаний при $\alpha << 1$.

◆ Если значение управляющего параметра α мало, $\alpha << 1$, то осциллятор Рэлея может быть описан как гармонический осциллятор, находящийся под действием малого возмущения:

$$\ddot{x} + x = \alpha\dot{x}\left(1 - \dot{x}^2\right). \qquad (1)$$

В этом случае - который называется ***томсоновским*** - автоколебания осциллятора будут близки к гармоническим колебаниям.

✧ Термин "***томсоновский случай***" известен по крайней мере с 1939 г. [Т39], употребляется только в отечественной литературе и кажется странным, ибо ни один из великих Томсонов теорией автоколебаний не занимался. Эксперты объясняют его происхождение так: в этом случае поведение системы близко к поведению гармонического осциллятора - например, идеального колебательного контура, частота колебаний которого описывается формулой Томсона $\Omega = (LC)^{-1/2}$ (C - емкость конденсатора, L - индуктивность соединяющего его пластины линейного проводника пренебрежимо малого сопротивления).

Т39 - Теодорчик К.Ф. Энергетическое рассмотрение систем томсоновского типа. ЖТФ, 1939, т.9, в.11, с.1005.

◆ Если пренебречь пропорциональным α членом в уравнениях, то система (1) перейдет в гармонический осциллятор с единичной частотой свободных колебаний. Его закон движения может быть представлен в виде

$$x(t) = A\cos t. \qquad (2)$$

Рассмотрим движение системы, учтя, что значение α конечно и положительно. Будем описывать движение системы модулированным гармоническим колебанием с законом

$$x(t) = A(t)\cos\left(t + \Theta(t)\right) \equiv A\cos\varphi, \qquad (3)$$

где $A(t)$ и $\Theta(t)$ - медленно меняющиеся функции времени ($\dot{A}, \dot{\Theta} \sim \varepsilon << 1$). Подставляя решение (3) в уравнение (1) и пренебрегая членами второго порядка по ε ($\ddot{A}, \dot{A}\dot{\Theta}, \ddot{\Theta}, \dot{\Theta}^2$), получим уравнение

$$-\dot{A}\sin\varphi - 2A\dot{\Theta}\cos\varphi = \alpha A\sin\varphi\left(1 - A^2\sin^2\varphi\right). \qquad (4)$$

Умножая уравнение (4) на $\sin\varphi$ и усредняя по периоду движения, с учетом значений

$$\overline{\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}, \qquad \overline{\sin^4\varphi} = \frac{3}{8} \qquad (5)$$

получаем

$$\dot{A} = \alpha A\left(1 - \frac{3}{4}A^2\right). \tag{6}$$

Это уравнение (оно рассматривалось ранее - см. §3.02, пример 3) имеет одну устойчивую неподвижную точку

$$\boxed{A = \frac{2}{\sqrt{3}}} \tag{7}$$

Умножая уравнение (4) на $\cos\varphi$ и усредняя по периоду, получаем $\dot{\Theta} = 0$, что означает отсутствие поправок к частоте движения в первом порядке по α.

Таким образом, при малых α предельный цикл осциллятора Рэлея на фазовой плоскости близок к **окружности** радиуса $A = 2/\sqrt{3}$; этот цикл устойчив, а автоколебательное движение может быть описано как гармоническое колебание с единичной частотой.

Для осциллятора Ван дер Поля устойчивый предельный цикл близок к окружности радиуса $A = 2$.

◆ Рассмотрим автоколебания в томсоновском случае с точки зрения баланса энергии системы. Правую часть уравнения движения

$$\ddot{x} + x = \alpha\dot{x}\left(1 - \dot{x}^2\right). \tag{8}$$

можно рассматривать как выражение для малой внешней силы F, действующей на гармонический осциллятор. Мощность этой силы

$$P = F\dot{x} = \alpha\dot{x}^2\left(1 - \dot{x}^2\right). \tag{9}$$

Вычислим работу Q, совершаемую этой силой за период колебаний:

$$Q = \int_0^{2\pi} \alpha\left(A^2\sin^2 t - A^4\sin^4 t\right)dt = \frac{\alpha}{2}A^2\left(1 - \frac{3}{4}A^2\right). \tag{10}$$

Потребовав, чтобы работа за период обращалась в ноль, $Q = 0$, находим нетривиальное значение амплитуды периодического движения $A = 2/\sqrt{3}$ в согласии с формулой (7).

◆ Найдем поправку к частоте автоколебаний осциллятора Рэлея в томсоновском случае. Эквивалентность осцилляторов Рэлея и Ван дер Поля позволяет связать закон зависимости частоты от управляющего параметра $\Omega(\alpha)$ (одинаковый для обоих моделей) с ангармонизмом движения.

Начнем с важной леммы ("точка-тире теоремы"): **если** система совершает периодическое движение, **то** среднее по периоду T значение производной по времени любой функции динамических переменных равно нулю,

$$\boxed{\boxed{\overline{\dot{z}} = 0.}} \tag{11}$$

Доказательство:

$$\bar{\dot z} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \dot z dt = \frac{1}{T}\big(z(t+T) - z(t)\big) = 0 \qquad (12)$$

в силу условия периодичности движения. ■

Умножая уравнение движения осциллятора Ван дер Поля

$$\ddot z - \alpha \dot z\left(1 - z^2\right) + z = 0 \qquad (13)$$

на z, усредняя по времени и используя (11), получаем соотношение:

$$\overline{\dot z^2} = \overline{z^2}. \qquad (14)$$

Средние значения квадрата динамической переменной z и квадрата ее скорости равны и не зависят от параметра α. Представим теперь решение уравнения (13) в виде периодического движения

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\Omega t + \varphi_n\right) \qquad (15)$$

где Ω - неизвестная частота автоколебаний. Подстановка этого выражения в соотношение (14) приводит к (точному) равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 n^2 \Omega^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2. \qquad (16)$$

Считая колебания слабо ангармоничными, можно записать приближенное выражение квадрата частоты через Фурье-амплитуды

$$\Omega^2 \approx 1 - \frac{1}{A_1^2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2 - 1\right)A_n^2 \qquad (17)$$

С ростом ангармонизма автоколебаний осциллятора Ван дер Поля частота автоколебаний уменьшается.

Считая в низшем приближении движение гармоническим, а частоту $\Omega \approx 1$, в нулевом приближении имеем $z_1(t) \approx A_1 \cos t = 2\cos t$. Подставляя это выражение в правую часть уравнения $\ddot z + z = \alpha \dot z\left(1 - z^2\right)$ и выделяя в ней третью гармонику (которая дает основной вклад в ангармонизм колебаний), получаем для поправки первого приближения ζ уравнение

$$\ddot\zeta + \zeta = -\alpha \frac{A_1^3}{4}\sin 3t \qquad (18)$$

откуда $A_3 \approx \alpha A_1^3/32 \approx \alpha/4$. В итоге получаем зависимость частоты автоколебаний от управляющего параметра:

$$\boxed{\Omega(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{16}}, \tag{19}$$

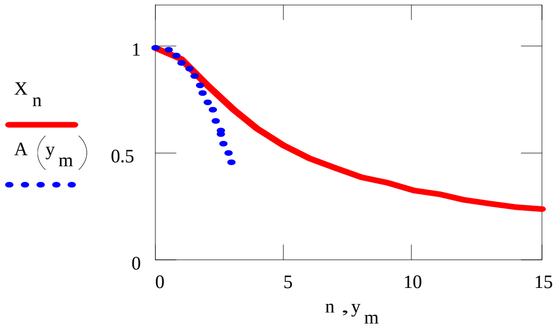

Рис. 07.1
Зависимость частоты Ω автоколебаний осциллятора Рэлея от параметра α. Сплошная линия - численный расчет, штриховая линия по приближенной формуле (19).

§ 6.05 Свойства автоколебаний при $\alpha >> 1$.

◆ Если значение управляющего параметра α велико, $\alpha >> 1$, то автоколебания осциллятора Рэлея являются релаксационными (см. дополнение к лекции L01; на рис. V01.3 показан закон движения осциллятора Рэлея при $\alpha = 5$). Для определения зависимости частоты автоколебаний Ω от управляющего параметра при больших α удобно перейти в уравнении движения

$$\ddot{z} - \alpha \dot{z}\left(1 - \dot{z}^2\right) + z = 0 \tag{20}$$

к новым переменным. Введем в качестве независимой переменной приведенное время $\tau = t/\alpha$, а в качестве динамической - переменную $x = z/\alpha$. В этих переменных уравнение движения примет вид

$$\alpha^{-2}\ddot{x} - \dot{x}\left(1 - \dot{x}^2\right) + x = 0, \tag{21}$$

эквивалентный системе уравнений

$$\dot{x} = y, \qquad \varepsilon \dot{y} = y\left(1 - y^2\right) - x \tag{22}$$

где новый управляющий параметр $\varepsilon = \alpha^{-2}$ мал: $\varepsilon << 1$.

В этом случае движение системы на предельном цикле можно описать как последовательность сменяющих друг друга быстрых и медленных движений, каждое из которых может быть описано **ОДНИМ** уравнением первого порядка. Малость параметра ε означает, что почти всюду на фазовой плоскости скорость изменения y много больше скорости изменения x. Поэтому при почти любых начальных условиях фазовая точка будет быстро приближаться к кубической параболе

$$\boxed{x = y - y^3}, \tag{23}$$

на которой правая часть второго уравнения системы (22) обратится в ноль, при этом фазовая траектория будет близка к вертикальной прямой ($x = \mathrm{const}$).

Медленное движение точки на кубической параболе (23) может быть описано одним уравнением первого порядка, получающимся из первого уравнения системы (22) при подстановке (23):

$$\frac{dy}{dt}\cdot\left(1-3y^2\right)=y. \qquad (24)$$

По достижении точки $\vec{H}$ с координатами $\left\{2/3\sqrt{3},\,1/\sqrt{3}\right\}$ или симметричной ей точки $\vec{H}^*$ с координатами $\left\{-2/3\sqrt{3},\,-1/\sqrt{3}\right\}$ скорость медленного движения, согласно уравнению (35), обращается в бесконечность - разделение на медленные и быстрые движения теряет применимость.

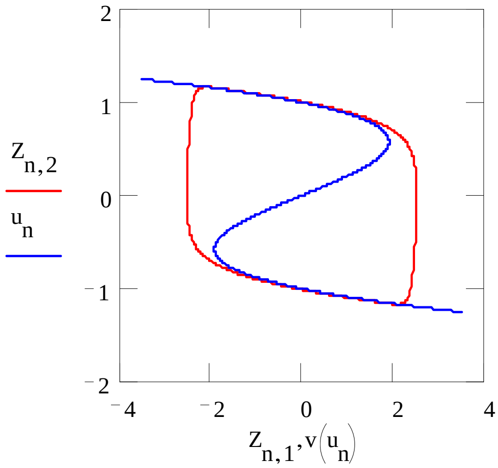

Рис. 07.2
Предельный цикл осциллятора Рэлея на фазовой плоскости переменных $x, \dot{x}$ при $\alpha=5$ (сплошная линия) и его аппроксимация ветвями кубической параболы (23) (штриховые линии). Вертикальные прямые на рисунке не показаны.

Вблизи этих точек фазовая траектория переходит из окрестности кубической параболы (34) на почти вертикальную фазовую траекторию, переводящую систему в окрестность точки $\vec{L}$ с координатами $\left\{2/3\sqrt{3},\,-2/3\sqrt{3}\right\}$ (или, соответственно, в точку $\vec{L}^*$ с координатами $\left\{-2/3\sqrt{3},\,2/3\sqrt{3}\right\}$).

Таким образом, при $\alpha>>1$ предельный цикл осциллятора Рэлея может быть аппроксимирован двумя ветвями кубической параболы (23) и касательными к ним вертикальными отрезками.

◆ Движение осциллятора Рэлея на предельном цикле происходит с сильно изменяющейся скоростью. Продолжительность интервала медленного движения по ветви кубической параболы от точки $\vec{L}$ до точки $\vec{H}^*$ может быть вычислена из уравнения (24):

$$T=\int_a^b\frac{d\left(y-y^3\right)}{y}=\left(\ln y-\frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_a^b=\frac{3}{2}-\ln 2=0.806 \qquad (25)$$

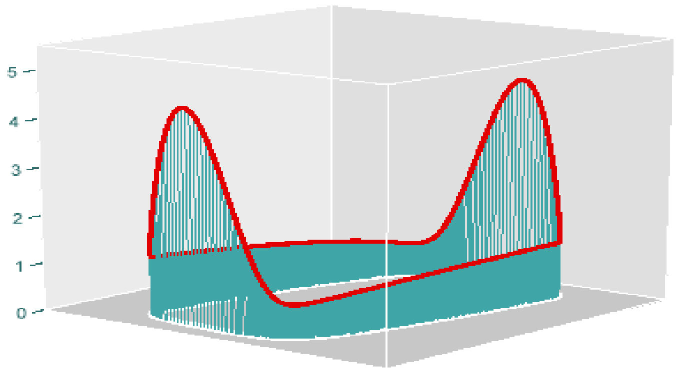

Рис. 07.3
Пространственная кривая $V(x, y)$ показывает зависимость скорости движения фазовой точки в осцилляторе Рэлея от положения фазовой точки на предельном цикле при $\alpha = 5$. Предельные значения скорости: $\min V = 0.683$, $\max V = 4.442$.

где $a = -2/3\sqrt{3}$, $b = -1/\sqrt{3}$. В пределе $\varepsilon \to 0$ величина этого интервала не зависит от ε. Если пренебречь продолжительностью времени быстрых движений системы по вертикальным участкам предельного цикла, то в приведенной шкале времени $\Omega' = \pi/T$. В исходных переменных

$$\boxed{\Omega(\alpha) = \frac{Q}{\alpha}} \tag{26}$$

где константа Q есть $Q = 2\pi(3 - 2\ln 2)^{-1} = 3.894$.

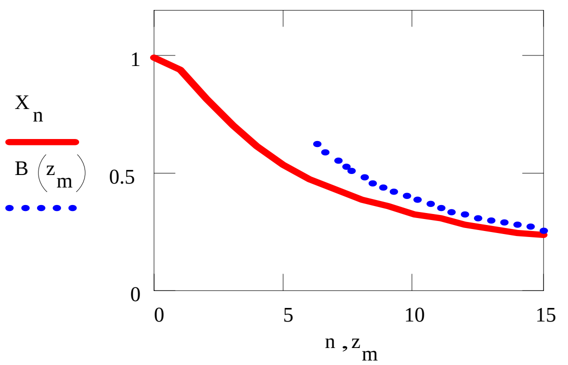

Рис. 07.4
Зависимость частоты автоколебаний осциллятора Рэлея от параметра α. Сплошная линия - численный расчет, штриховая линия по приближенной формуле (26).

◆◆ Для системы с предельным циклом основной задачей является исследование формы цикла и зависимости частоты автоколебаний от параметров.

Описание автоколебаний осциллятора Рэлея в томсоновском случае, при $\alpha << 1$, основано на близости закона движения к гармоническим колебаниям и чаще всего использует модель медленно модулированного гармонического колебания (3), позволяющую свести задачу к рассмотрению одномерной автономной системы (6). Альтернативой служит модель слабо ангармонического периодического колебания (использование (18)).

Описание релаксационных автоколебаний осциллятора Рэлея при $\alpha >> 1$ также достигается путем разделения движений на быстрые и медленные и исключением быстрых движений в предположении ничтожности времен их осуществления (см. §3.01). В результате задача сводится к рассмотрению одномерной автономной системы (23).

☯