ЛЕКЦИЯ #03
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ПРОГРАММА
ОДНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

ТЕСТ #1

§ 3.01 Исследовательская программа

◆ В центре исследовательской программы теории колебаний стоит задача изучения устойчивых (по Ляпунову или орбитально) периодических и квазипериодических колебаний - выявление областей их существования в пространстве параметров и определение зависимостей характеристик колебаний (в первую очередь - их частот) от параметров динамической системы.

◆ Для решения этой задачи эффективны методы, основанные на непосредственном **численном** интегрировании уравнений движения (1). Поскольку основной объект внимания - устойчивые движения, требования к точности решения уравнений невысоки. Решение задачи Коши, позволяющее с графической точностью (около 1%) изобразить отрезок фазовой траектории длиной в несколько единиц требует считанных секунд работы современных персональных компьютеров. При интегрировании уравнений с различными начальными условиями устойчивые неподвижные точки и предельные циклы выделяются автоматически. Поэтому исследование структуры фазовой плоскости (фазового пространства автономной динамической системы с $K=2$) с помощью численного эксперимента - нетрудная работа.

◆ Постановка основной задачи теории колебаний во многом определяет и выбор методов ее **аналитического** решения. Точно решаемые модели представляют собой редкие (хотя ценные) исключения. Приближенные методы решения как правило, основаны на **разделении** движений по масштабам времени на **быстрые** (с масштабом τ_1) и **медленные** (с масштабом τ_2):

$$\tau_1 << \tau_2. \qquad (1)$$

Примером методов такого типа является метод медленно меняющихся амплитуд, основанный на представлении движения в форме (1.22). Отметим также два предельных случая этой схемы.

В одном пределе время **медленных** изменений считается **бесконечно большим**. Первым этапом решения является подстановка закона движения заданного вида (периодического, реже квазипериодического) с неопределенными параметрами в уравнения движения, пренебрежение членами, не соответствующими постулированной форме закона движения, и самосогласованное определение параметров решения. Последний этап обычно сводится к исследованию корней системы алгебраических уравнений - задача в общем виде громоздкая, но часто допускающая асимптотическое решение в предельных случаях. На худой конец, для решения алгебраической системы можно использовать численные методы - хотя, заметим, в отличие от численного интегрирования дифференциальных уравнений численное решение систем нелинейных алгебраических уравнений не может считаться рутинной задачей. Найденные аналитически приближенные законы движения могут быть проверены сравнением с результатами прямого численного решения системы уравнений движения. В тех случаях, когда точность найденных аналитических решений недостаточна, для их уточнения могут быть применены методы теории возмущений.

В другом пределе время **быстрых** изменений считается **бесконечно малым**. Если в системе уравнений движения удается выделить уравнение для быстрого изменения переменной, то в нулевом приближении это уравнение превращается в функциональную связь между переменными, и порядок системы понижается. Такой подход используется для исследования релаксационных колебаний.

◆ В дальнейшем мы будем изучать свойства движений динамических систем, рассматривая их в порядке увеличения числа динамических переменных - размерности фазового пространства K. При этом неавтономные системы будут рассматриваться сразу после соответствующих автономных. Для систем данного класса типы движения будут рассматриваться в порядке возрастания сложности - от гармонического к периодическим, квазипериодическим и к модулированным периодическим колебаниям (см. L01).

Основное внимание будет уделено рассмотрению автономных двумерных систем и их неавтономных обобщений. Свойства таких систем будут изучаться в рамках установленного традицией набора **стандартных моделей**. Почти все стандартные модели теории колебаний - осциллятор Дуффинга, модель Лотки - Вольтерра, осцилляторы Рэлея и Ван дер Поля, брюсселятор - даются системами уравнений, правые части которых представляют собой **полиномы второй или третьей степени** от динамических переменных. Важнейшее исключение составляет модель маятника, уравнение движения которой включает трансцендентную функцию; для ее специального рассмотрения есть достаточные причины, которые будут обсуждены в свое время.

Полиномиальные модели невысоких степеней с одной стороны, удобны для аналитических расчетов, а с другой - обладают типичными свойствами нелинейных систем общего вида.

◆ Необходимость использования стандартных моделей связана с тем, что возможность исчерпывающего исследования сколько-нибудь обширных классов динамических систем практически отсутствует. Рассмотрим автономную динамическую систему с двумя переменными, для которой правые части уравнений движения даются полиномами второй степени общего вида:

$$\dot{x} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2,$$
$$\dot{y} = a_7 + a_8 x + a_9 y + a_{10} x^2 + a_{11} xy + a_{12} y^2. \qquad (2)$$

Часть параметров a_i может быть фиксирована (на значениях, равных 0 или ± 1) различными преобразованиями: сдвигом начала координат (2), поворотом осей координат (1), выбором масштабов динамических переменных (2) и выбором масштаба времени (1). Оставшаяся приведенная система будет характеризоваться шестью произвольными параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Ее полный анализ должен включать рассмотрение очень многих (см. задачу) характерных случаев (типа $\alpha << \zeta \sim 1 << \delta << \beta \sim \varepsilon << \gamma$).

♦ **Задача 03.1** Найти точное число характерных случаев для системы с шестью безразмерными параметрами. УКАЗАНИЕ. Знак "~" симметричен, знак "<<" - нет.

Подчеркнем, что здесь мы не касаемся вопроса о трудности решения задачи, а говорим только об объеме исчерпывающего ответа.

◆ С увеличением размерности системы сложность исследования системы сильно возрастает. Это вызвано несколькими причинами. Во-первых, чем больше размерность фазового пространства, тем сложнее может быть ее установившееся движение. Например, для гамильтоновых консервативных систем число независимых частот квазипериодического движения может достигать числа степеней свободы $N = K/2$ [А89, §49]. В общем случае частот может быть еще больше: по доказанной Андроновым и Виттом теореме [АВ30; А56, с.47], если все динамические переменные системы (1) совершают квазипериодическое движение, то число его независимых частот может достигать (но не превосходить) $K-1$. Чем больше частот, тем более громоздкой становится самая простая модель движения (как минимум, должна быть определена одна фурье-амплитуда для каждой частоты). Практически в теории колебаний ограничиваются рассмотрением квазипериодических движений не сложнее двухчастотных.

АВ30 - Андронов А.А., Витт А.А. Sur le movements quasi-periodiques. Ж. прикл. физики, 1930, т.6, в.1, с.119.

А56 - Андронов А.А. Собрание трудов. Изд.-во АН СССР, 1956. - 538 с.

А89 - Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. - М.: Наука, 1989. - 472 с.

Во-вторых, движение многомерной системы трудно представить наглядно. Сравнительно легко воспринимаются данные, представленные линией на плоскости или поверхностью в трехмерном пространстве. Изображение линии (фазовой траектории) в трехмерном пространстве уже может вызвать трудности в интерпретации, поэтому стараются и его привести к двумерному случаю (показывая, например, для неавтономной системы с одной степенью свободы точки пересечения линий $L(x, \dot{x}, t)$ с координатной плоскостью $\{x, \dot{x}\}$.

Наконец и в третьих, с ростом числа динамических переменных увеличивается, как правило, число параметров модели. В результате полное исследование динамической системы становится весьма трудоемким.

◆ Среди многомерных динамических систем в теории колебаний в первую очередь изучаются четырехмерные автономные модели, описывающие системы, составленные из двух слабо взаимодействующих (слабо связанных) двумерных систем.

◆ В завершающем разделе будут рассмотрены модели, которые описываются дифференциально-разностными уравнениями. Хотя с формальной точки зрения эти модели не относятся к конечномерным динамическим системам (состояние системы не задается конечным набором чисел), но их свойства во многих практически интересных случаях могут быть изучены методами теории колебаний.

ОДНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрение динамических систем мы начнем с одномерных автономных моделей. Хотя закон движения таких систем не относятся к колебательным (почему?), есть ряд причин, по которым именно с них надо начинать.

Во-первых, именно эти модели являются простейшими. Во-вторых, обычная для таких моделей монотонная релаксация к положению равновесия является весьма распространенным типом движения в окрестности неподвижных точек более сложных систем. В-третьих, в некоторых случаях модели с несколькими динамическими переменными могут быть редуцированы к одномерным. Примерами могут служить уравнения, возникающие в теории двумерных интегрируемых систем, совершающих релаксационные колебания, и при использовании метода медленно меняющихся амплитуд.

В конце этого раздела рассматриваются две неавтономные одномерные системы.

§ 3.02 Уравнение движения и неподвижные точки

◆ Простейшей моделью динамической системы является автономная модель с одной динамической переменной x. Уравнение движения такой модели имеет вид

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = F(x)}. \qquad (3)$$

Фазовое пространство такой системы одномерно. Неподвижные точки o_i определяются уравнением

$$F(o_i) = 0. \qquad (4)$$

Пусть $F(o_1) = 0$. Рассмотрим движение системы вблизи неподвижной точки o_1. Положим $x = o_1 + \xi$, подставим это выражение в уравнение движения (1), разложим $F(x)$ в ряд Тейлора по ξ и пренебрежем всеми членами, кроме линейных по ξ. Такая процедура называется ***линеаризацией***, а величина ξ называется ***отклонением***. Уравнение движения для отклонения имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \kappa\xi \qquad (5)$$

где

$$\kappa = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_1} \qquad (6)$$

Если значение κ конечно, то решение уравнения (5) имеет вид

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\kappa t}. \qquad (7)$$

Если $\kappa > 0$, то отклонение со временем растет по абсолютной величине - неподвижная точка неустойчива, а если $\kappa < 0$, то отклонение со временем убывает по абсолютной величине - неподвижная точка устойчива.

✧ Величина κ может быть введена в любой - а не только в неподвижной - точке фазового пространства и называется локальным характеристическим показателем. ✧ Случай $\kappa = \pm\infty$ встречается в теории колебаний гамильтоновых систем с одной степенью свободы; при этом точка O_1 называется точкой поворота.

◆ Если функция $F(x)$ гладкая, то в общем случае параметры $\kappa(x_i)$ в неподвижных точках не равны нулю. Устойчивые неподвижные точки являются аттракторами движения, любой интервал, содержащий только одну устойчивую неподвижную точку является ловушкой, а наибольший из таких интервалов является бассейном аттрактора. Финитное движение системы (3) всегда заканчивается в устойчивой неподвижной точке.

Уравнение движения (3) часто может быть решено в явном виде.

◆ **Пример 1.** Простейшая модель химической кинетики χ_1, описанная в лекции L02 (пример 4) при $\mu \to 0$ превращается в систему уравнений

$$\dot{x} = -2x, \qquad y = x \qquad (8)$$

Первое уравнение одномерно, а второе может быть проинтегрировано после подстановки явного вида функции $x(t)$: в итоге $x(t) = x_0 e^{-2t}$, $y(t) = y_0 + x_0\left(1 - e^{-2t}\right)/2$.

◆ **Пример 2.** В экологическом моделировании численность $N(t)$ особей определенного вида в данной популяции обычно описывается моделью типа (1)

$$\dot{N} = F(N). \qquad (9)$$

Простейшая, линейная зависимость $F(N) = aN$ имеет одну неустойчивую неподвижную точку $N_1 = 0$ и соответствует введенной Мальтусом (R.T. Malthus, 1798) модели неограниченного экспоненциального роста численности популяции. Более реалистичная модель, учитывающая ограниченность ресурсов, была введена Ферхюльстом (P.F. Verhulst, 1845)

$$\dot{N} = aN - bN^2 \qquad (10)$$

При $a > 0$, $b > 0$ эта модель имеет две неподвижные точки - неустойчивую $N_1 = 0$ и устой=

чивую $N_2 = a/b$. Уравнение (10) элементарно интегрируется:

$$N(t) = \frac{aN_0 e^{at}}{bN_0\left(e^{at}-1\right)+a} \tag{11}$$

Если $N_0 << N_2$, то начальная стадия роста является экспоненциальной, $N(t) \approx N_0 e^{at}$. При больших t функция $N(t)$ стремится к предельному значению N_2 по экспоненциальному закону:

$$N(t) \approx N_2 - \left(\frac{N_2}{N_0} - 1\right)e^{-at} \tag{12}$$

Уравнение Ферхюльста (10) часто называют ***логистическим уравнением***, а закон движения (11) при $a > 0$, $b > 0, N_0 << a/b$ называют ***логистическим законом***.

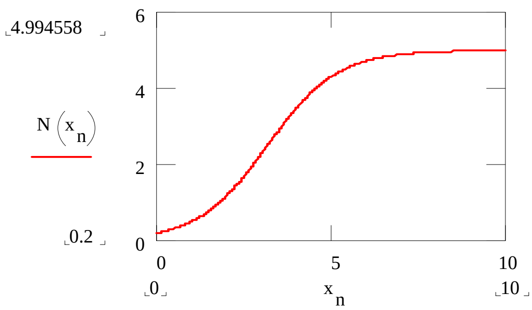

Рис. 03.1
Логистический закон движения (11) при $a = 1$, $b = 0.2$, $N(0) = 0.2$.

◆ **Пример 3.** Рассмотрим модель с уравнением движения

$$\dot{A} = \alpha A\left(1 - \frac{3}{4}A^2\right). \tag{13}$$

Такое уравнение описывает медленные (при $\alpha << 1$) изменения амплитуды A гармонических колебаний в осцилляторе Рэлея. Домножая уравнение (13) на A и вводя переменную $x = A^2$, вновь приходим к логистическому (ср. (10)) уравнению

$$\dot{x} = 2\alpha x - \frac{3}{2}\alpha x^2. \tag{14}$$

Таким образом закон изменения **квадрата** амплитуды гармонических колебаний в осцилляторе Рэлея при $\alpha << 1$ является логистическим.

◆ Уравнение движения (3) в любом случае может быть сведено к однократной квадратуре

$$dt = \int \frac{dx}{F(x)}, \tag{15}$$

определяющей функцию $t(x)$ и, тем самым, обратную ей функцию $x(t)$. Такую форму представления результата в теоретической физике принято считать точным решением задачи и тогда, когда интеграл в (15) не может быть выражен через известные функции.

EOL ☯