

М.Г. Мартемьянов

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ
НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

В проекте №1 исследовалась двумерная автономная система

$$\begin{cases} \dot{x} = y \cos(kx) \\ \dot{y} = ax^2y + \frac{x}{k} \sin(kx) \end{cases} . \quad (1)$$

Были найдены её неподвижные точки, определены их тип и устойчивость, рассмотрены бифуркации при изменении управляющих параметров.

Исследование свойств вынужденного периодического движения этой модели является целью данной работы.

Проекция фазовых траекторий на плоскость XU

Исходная система (1) возмущается добавлением гармонического члена $F \cos(\omega t)$ в правую часть первого уравнения.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \cos(kx) + F \cos(\omega t) \\ \dot{y} = ax^2y + \frac{x}{k} \sin(kx) \end{cases} . \quad (2)$$

Параметры модели $a = -0.2$ и $k = \pi$ фиксированы. При таком выборе параметров невозмущённая система имеет неподвижные седловые точки, устойчивые узлы и устойчивые фокусы. Система решалась численно с помощью процедуры rkfixed пакета mathcad при различных начальных условиях. Вычисленные массивы $x(t)$ и $y(t)$ передавались в "Microcal Origin" и рисовались на одном графике. Результат показан на рис.1. При данных $F = 0.6$ и $\omega = 1$ практически около каждой неподвижной устойчивой точки невозмущенной модели существует установившееся периодическое движение.

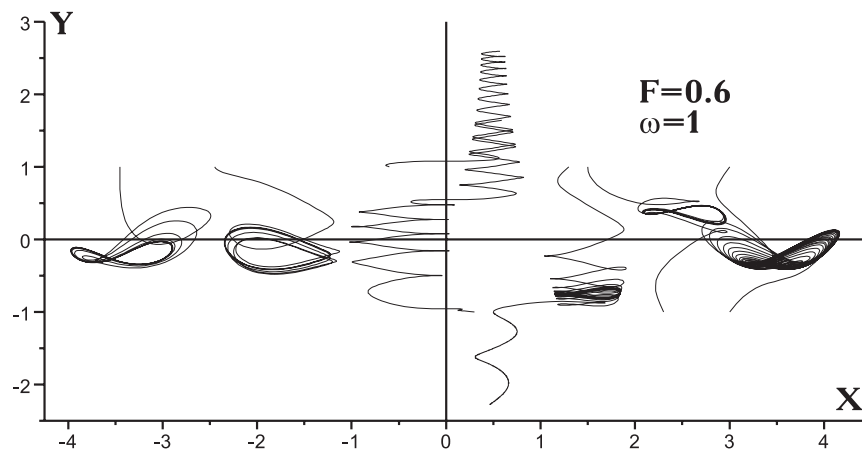


Рис.1: Проекция фазовых траекторий на плоскость XU

Исследование зависимости характеристик установившегося периодического движения от управляющих параметров F и ω

Ограничимся рассмотрением движения в окрестности неподвижной точки $x_0 = 1.5 \frac{\pi}{k} = 1.5$, $y_0 = \frac{1}{1.5\pi a} = -1.061$. Эта точка является устойчивым узлом невозмущённой системы.

1. Решение линеаризованной системы

Рассмотрим малую окрестность неподвижной точки. Представим x и y как $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, где ξ, η малы. Подставим x и y в (2). Раскладывая $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ и пренебрегая членами второго порядка и выше по ξ и η , получим:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = y_0 k \xi + F \cos(\omega t) \\ \dot{\eta} = (2x_0 y_0 a - \frac{1}{k}) \xi + a x_0^2 \eta + (a x_0^2 y_0 - \frac{x_0}{k}) \end{cases}, \quad (3)$$

или

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\frac{10}{3} \xi + F \cos(\omega t) \\ \dot{\eta} = \frac{1}{\pi} \xi - \frac{9}{20} \eta \end{cases}. \quad (4)$$

Решение этой системы:

$$\begin{cases} \xi = \alpha(10 \cos(\omega t) + 3\omega \sin(\omega t)) \\ \eta = \left(\frac{2043\alpha}{\pi(400\omega^2+81)} - \alpha\frac{3}{\pi}\right) \cos(\omega t) + \frac{4540\omega\alpha}{\pi(400\omega^2+81)} \sin(\omega t) \end{cases}. \quad (5)$$

Здесь $\alpha = \frac{3F}{9\omega^2+100}$.

2. Зависимость амплитуды первой фурье-гармоники от частоты

Решение (5) было получено в предположении малости ξ и η . Очевидно, что это накладывает условия на область изменения параметров F и ω . Выясним, при каких значениях F линеаризованное решение заметно отличается от точного. Для этого, фиксируя $\omega = 0.5$, строим проекции фазовых траекторий на плоскость XU при различных F . Результат представлен на рис.2.

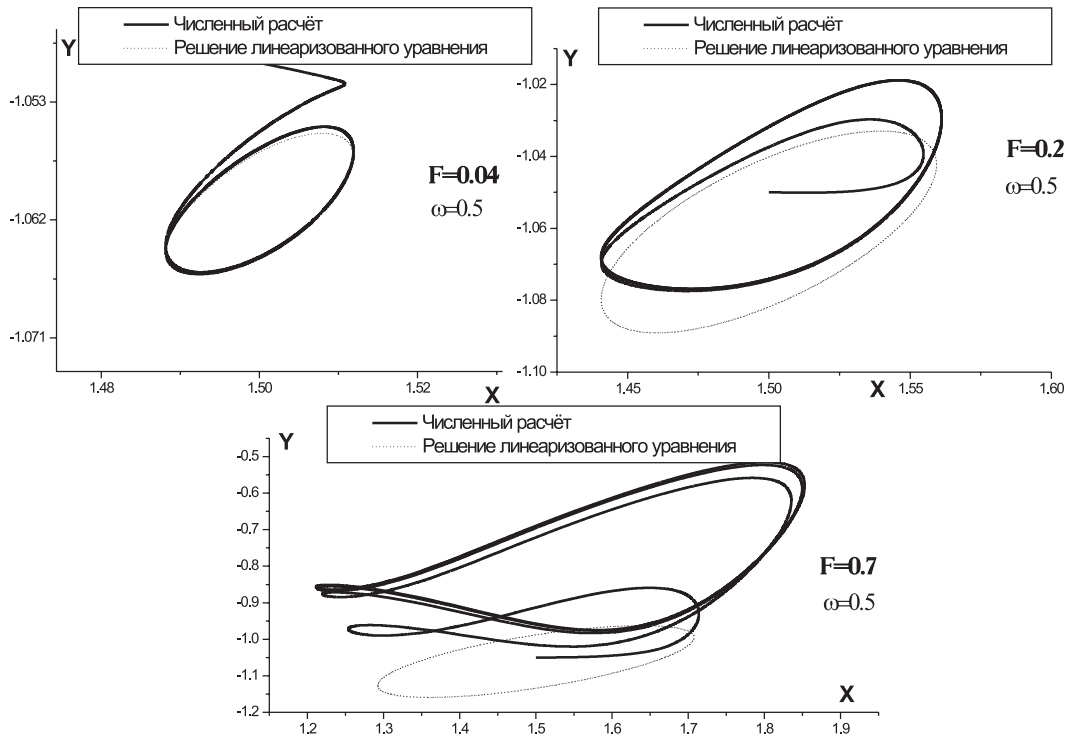


Рис.2: Проекция фазовых траекторий на плоскость XU при различных F

При $F = 0.04$ линеаризованное решение близко к точному. Разница между ними становится значительна уже при $F = 0.2$, а при $F = 0.7$ проекция фазовой траектории точного решения уже не лежит в окрестности рассматриваемой точки. Поэтому при использовании решения линеаризованной системы будем ограничивать $F \leq 0.1$.

Для нахождения зависимости амплитуды первой фурье-гармоники от частоты воспользуемся результатом линеаризации, положив $F = 0.04$. Вычисления получаются достаточно простыми, поскольку $A_1(\omega)$ определяется коэффициентами перед $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ в (5). Полученные зависимости показаны на рис.3.

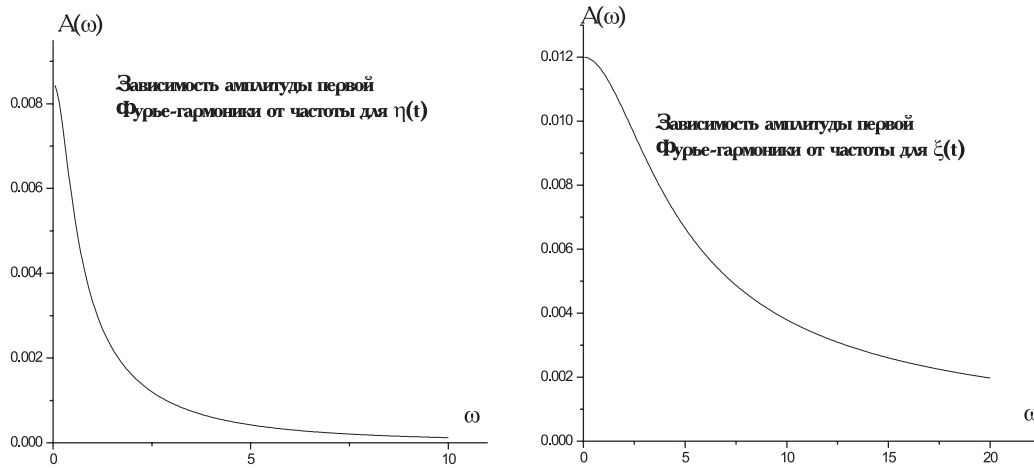


Рис.3: Зависимость амплитуды первой фурье-гармоники от частоты, $A_1(\omega)$

3. Зависимость коэффициента ангармонизма ν от величины возмущения F

Для нахождения $\nu(F)$ необходимо брать значения F , выходящие за пределы области, где можно использовать решение линеаризованной модели, поэтому зависимость $\nu(F)$ будем получать численно. Фиксируем $\omega = 0.5$. На первом этапе $x(t)$, $y(t)$ считаются процедурой `rkfixed`. Затем эти массивы передаются в "Microcal Origin" и аппроксимируются функцией $\psi(t)$ (пункт Analysis/Non-linear Curve Fit...).

$$\psi(t) = c_0 + \sum_{k=1}^4 c_k \cos(k\omega t) + s_k \sin(k\omega t) \quad .$$

Таким образом вычисляются амплитуды фурье-гармоник до четвёртого порядка включительно. Полученные зависимости $\nu(F)$ представлены на рис.4.

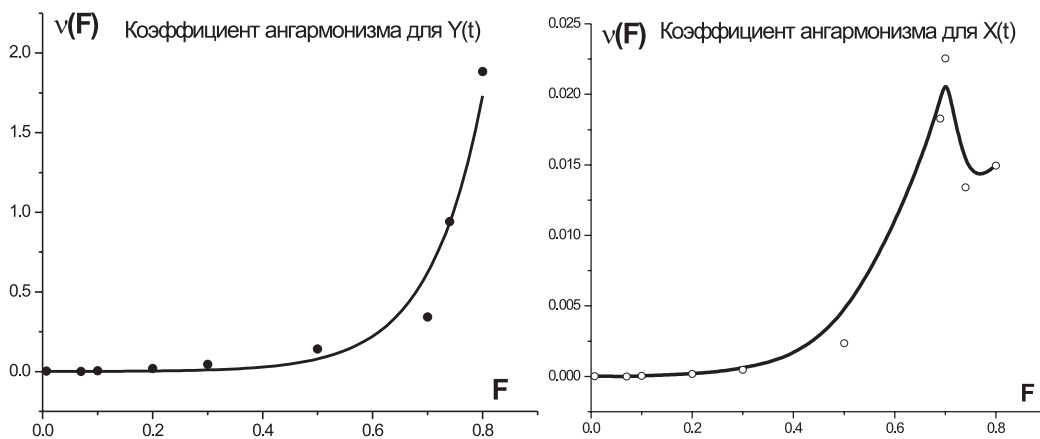


Рис.4: Зависимость $\nu(F)$

Падение ν при $F > 0.7$, возможно, объясняется тем, что фазовая траектория установившегося периодического движения, выходя из исследуемой окрестности неподвижной точки, оказывается под действием других неподвижных точек.

4. Поведение системы при больших F

При величине возмущения F , сравнимой с расстояниями между неподвижными точками невозмущенной модели, проекция фазовой траектории может охватывать несколько точек. Поведение системы в этом случае можно исследовать численно, пользуясь методом, описанным при построении проекция фазовых траекторий на плоскость XU в начале проекта. Полученная картина показана на рис.5.

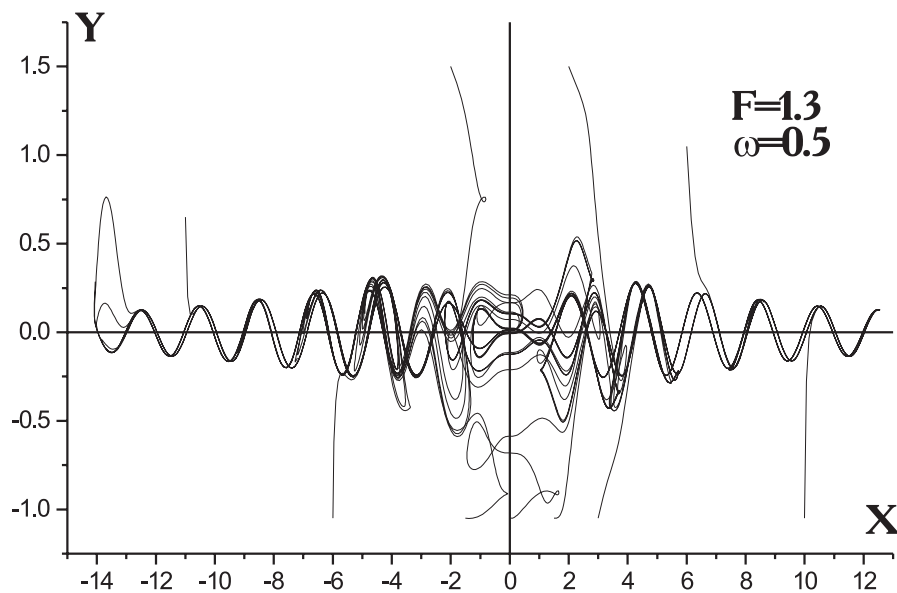


Рис.5: Проекция фазовых траекторий на плоскость XU при большом F

Фазовые траектории периодического движения располагаются вдоль оси X при любом выборе начальных условий. Единственной установившейся периодической траектории нет, поскольку её форма зависит от задания начальной точки счёта. Вместе с тем, на плоскости всё же можно выделить кривые, вдоль которых располагаются периодические траектории.