

М.Г. Мартемьянов

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ  
С ДВУМЯ УПРАВЛЯЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуемая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \cos(kx) \\ \dot{y} = ax^2y + \frac{x}{k} \sin(kx) \end{cases} \quad (1)$$

Выбор данной системы ничем не обоснован.

## Нахождение неподвижных точек

$$\begin{cases} y \cos(kx) = 0 \\ ax^2y + \frac{x}{k} \sin(kx) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$1. \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{k} \sin(kx) = 0, \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \cos(kx) = 0 \\ ax^2y + \frac{x}{k} \sin(kx) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi n}{k}; n \in Z. \end{cases}$$

Очевидно, что  $a \neq 0$  и  $x \neq 0$ . Тогда получаем:

$$\begin{cases} \cos(kx) = 0 \\ axy + \frac{1}{k} \sin(kx) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2k} + \frac{\pi n}{k} \\ a(\frac{\pi}{2k} + \frac{\pi n}{k})y + \frac{1}{k} (-1)^n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{k} (n + \frac{1}{2}) \\ y = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi a(n + \frac{1}{2})}; n \in Z. \end{cases}$$

Итак, имеем неподвижные точки:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi n}{k}; n \in Z, \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{k} (n + \frac{1}{2}) \\ y = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi a(n + \frac{1}{2})}; n \in Z. \end{cases} \quad (4)$$

## Локальная диссипация

$$\Lambda = yk \sin(kx) - ax^2.$$

Локальная диссипация знакопеременна. Определим области её положительных и отрицательных значений. Пусть  $\Lambda > 0$ , тогда

$$yk \sin(kx) > ax^2.$$

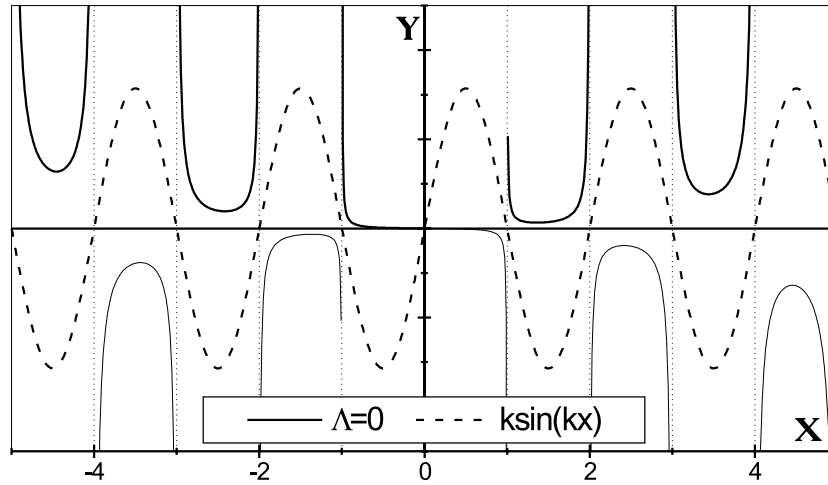
Решим это неравенство при фиксированных параметрах. Пусть  $a = -0.2, k = \pi$ . Тогда

$$y > \frac{ax^2}{k \sin(kx)}, \text{ если } k \sin(kx) > 0$$

и

$$y < \frac{ax^2}{k \sin(kx)}, \text{ если } k \sin(kx) < 0.$$

График  $y = \frac{ax^2}{k \sin(kx)}$  изображен на рис.1. Там же построена зависимость  $y = k \sin(kx)$ .

Рис.1: К определению знака  $\Lambda$ 

## Определение типа неподвижных точек и их устойчивость

Матрица устойчивости имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} -yk \sin(kx) & \cos(kx) \\ 2axy + \frac{\sin(kx)}{k} + x \cos(kx) & ax^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

След матрицы (5)  $S = ax^2 - yk \sin(kx)$ ; её определитель  $D = -akx^2y - \cos(kx) \left( 2axy + \frac{\sin(kx)}{k} + x \cos(kx) \right)$ .

### 1. Неподвижные точки (3)

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi n}{k}; n \in Z. \end{cases}$$

Для них  $S = a\left(\frac{\pi n}{k}\right)^2$ ,  $D = -\cos(kx) \sin(kx) \frac{1}{k} - x \cos^2(kx) = -\frac{\pi n}{k}$ . Рассмотрим несколько случаев.

1.  $a > 0, \implies S > 0$ .

Точки, для которых  $\frac{n}{k} > 0$  (то есть  $x > 0$  и  $D < 0$ ) являются седловыми. Если  $\frac{n}{k} < 0$ , то точки будут неустойчивыми фокусами или узлами:

а) неустойчивые узлы, если  $\frac{S^2}{4} - D > 0, \iff$

$$\frac{n}{k} < -\frac{1}{a^{2/3} \pi};$$

б) неустойчивые фокусы, если  $\frac{S^2}{4} - D < 0, \iff$

$$\frac{n}{k} > -\frac{1}{a^{2/3} \pi}.$$

2.  $a < 0, \implies S < 0$ .

Если  $\frac{n}{k} > 0$  (то есть  $x > 0$  и  $D < 0$ ), тогда соответствующие точки - седловые.  
Если  $\frac{n}{k} < 0$ , тогда:

а) устойчивые узлы, если  $\frac{S^2}{4} - D > 0, \iff$

$$\frac{n}{k} < -\frac{1}{a^{2/3}\pi};$$

б) устойчивые фокусы, если  $\frac{S^2}{4} - D < 0, \iff$

$$\frac{n}{k} > -\frac{1}{a^{2/3}\pi}.$$

3.  $a = 0, \implies S = 0.$

Если  $\frac{n}{k} > 0 \implies D < 0$ , то эти точки - седловые. Если  $\frac{n}{k} < 0$  - точки типа центр.

## 2. Неподвижные точки (4)

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{k} (n + \frac{1}{2}) \\ y = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi a (n + \frac{1}{2})}; n \in Z. \end{cases}$$

След  $S = a(\frac{\pi}{k}(n + \frac{1}{2}))^2 - (-1)^{n+1} \frac{k}{\pi a (n + \frac{1}{2})} \sin(\frac{\pi}{k}(n + \frac{1}{2})) = a(\frac{\pi}{k}(n + \frac{1}{2}))^2 + \frac{k}{\pi a (n + \frac{1}{2})}.$

Определитель  $D = \frac{\pi}{k}(n + \frac{1}{2}).$  Обратим внимание, что  $S = aD^2 + \frac{1}{aD}.$

Собственные значения матрицы  $\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - D}.$

$$\lambda_1 = aD^2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{aD}.$$

$\text{Im}(\lambda) = 0, \implies$  эти точки либо узлы(когда  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ), либо седла( $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ). Рассмотрим характерные случаи.

1.  $D > 0; \quad S > 0$  только при  $a > 0; S < 0$ , если  $a < 0$ . Таким образом, если  $\frac{n+\frac{1}{2}}{k} > 0$ , то:  $a > 0$  - неустойчивый узел,  $a < 0$  - устойчивый узел.

2.  $D < 0$  ( $x < 0$ ). Точки (4) будут седловыми.

Расположение неподвижных точек на фазовой плоскости при некоторых фиксированных значениях параметров показано на рис.2.

## Бифуркации

Рассмотрим бифуркации неподвижных точек в системе при изменении параметра  $a$ . Когда  $a \rightarrow -\infty$ , то точки (3), для которых  $\frac{n}{k} < 0$  ( $x < 0$ ), являются устойчивыми фокусами. По мере приближения  $a$  к 0 они поочередно, начиная от ближайшей к началу координат точки, переходят в устойчивые фокусы. Таким образом, в процессе увеличения  $a$  происходит бифуркация смены типа точек с узлов на фокусы. При  $a \rightarrow 0$  все эти точки становятся устойчивыми фокусами.

При переходе  $a$  через 0 происходят следующие бифуркации. Точки (3), для которых  $x < 0$ , становятся точками типа центр (при  $a = 0$ ); затем превращаются в неустойчивые фокусы, которые по мере возрастания  $a$  переходят в неустойчивые узлы; при  $a \rightarrow \infty$  все эти точки становятся неустойчивыми узлами.

Седловые точки (3), для которых  $\frac{n}{k} > 0$ , при изменении  $a$  сохраняют свой тип, как и седловые точки (4) ( $\frac{n+\frac{1}{2}}{k} < 0$ ).

Что касается точек (4), для которых  $\frac{n+\frac{1}{2}}{k} > 0$ , то они, будучи при  $a < 0$  устойчивыми узлами, при  $a = 0$  испытывают бифуркацию смены устойчивости и становятся неустойчивыми узлами.

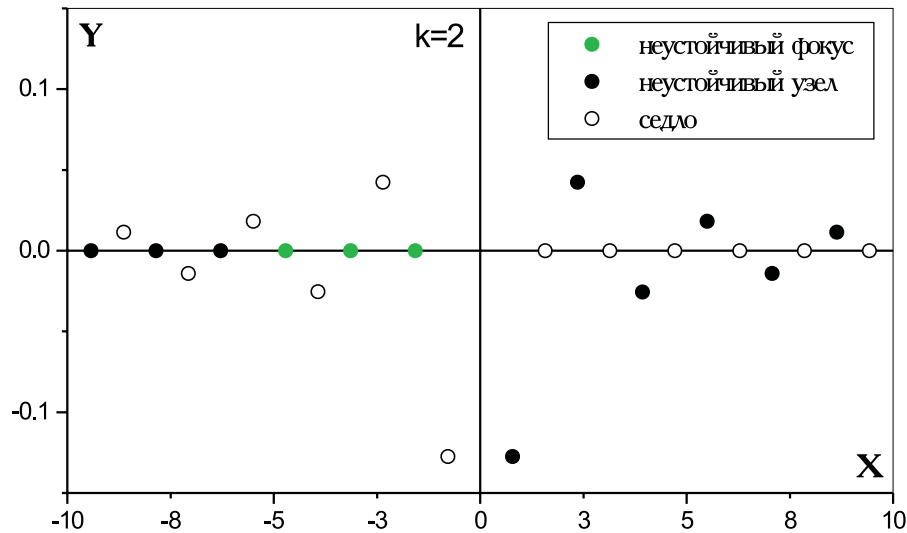


Рис.2: Неподвижные точки на фазовой плоскости при  $a > 0$ .

При изменении параметра  $k$  меняется лишь количество неподвижных точек, проходящих на единицу площади фазовой плоскости. Про изменение общего числа точек говорить не имеет смысла, поскольку число неподвижных точек бесконечно.

## Численный расчёт фазовых траекторий

Численный расчёт производился с помощью процедуры `gkfixed` пакета `Mathcad` при  $k = \pi$ ,  $a = -0,2$ . Начальные значения задавались вблизи неподвижных точек. Параметр времени выбирался в пределах от 0 до 40 или до -40 при числе точек интегрирования, равном 500. Фазовые траектории вычислялись около нескольких точек, находящихся вблизи начала координат. Параметры выбирались таким образом, чтобы на фазовом портрете присутствовали седла, фокусы и узлы. При  $a < 0$  все фокусы и узлы устойчивы.

Общая картина рисовалась следующим образом: уравнения движения решались с помощью `gkfixed`, и получаемый при этом массив значений передавался в `Origin 5.0`; все траектории строились на одном графике. Результат представлен на рис.3.

## Определение положения сепаратрис седловых точек

Матрица устойчивости имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} -yk \sin(kx) & \cos(kx) \\ 2axy + \frac{\sin(kx)}{k} + x \cos(kx) & ax^2 \end{pmatrix}.$$

Найдём положение сепаратрис вблизи седловых точек. Их направление задаётся собственными векторами матрицы устойчивости.

### 1. Сёдла (3)

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi n}{k}; n = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

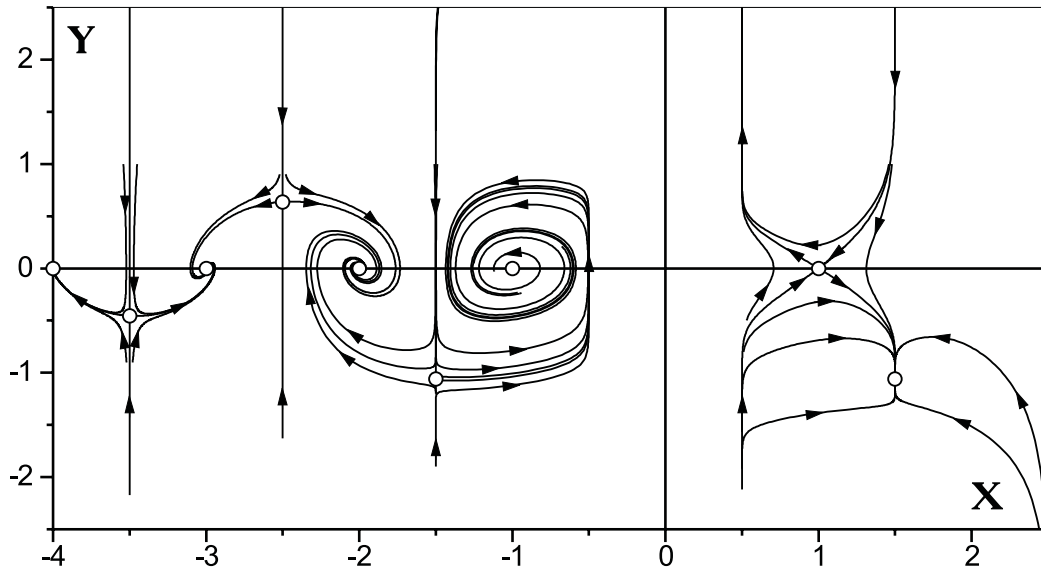


Рис.3: Численный расчёт фазовых траекторий.

Фиксируем  $k = \pi$ . Матрица устойчивости:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n \\ n(-1)^n & an^2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения:  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(an^2 + \sqrt{a^2n^4 + 4n})$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(an^2 - \sqrt{a^2n^4 + 4n})$ . Значению  $\lambda_1$  соответствует неустойчивая ветвь сепаратрисы, а  $\lambda_2$  - устойчивая. Вычисляя, получим, соответственно,  $\eta = \lambda_1(-1)^n\xi$ , и  $\eta = \lambda_2(-1)^n\xi$ . Здесь  $\eta$  и  $\xi$  - отклонения по  $y$  и  $x$ .

## 2. Сёдла (4)

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{k} \left( n + \frac{1}{2} \right) \\ y = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi a \left( n + \frac{1}{2} \right)}; n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Выберем  $n = -1$ . Тогда

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a} & 0 \\ \frac{1}{\pi} & \frac{a}{4} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения:  $\lambda_1 = -\frac{2}{a}$ ,  $\lambda_2 = \frac{a}{4}$ . Устойчивая ветвь  $\xi = \text{const}$ ; неустойчивая  $\eta = \text{const}$ .

Вычисленные сепаратрисы совпадают с полученными в результате интегрирования уравнений движения вблизи седловых точек. О глобальном поведении сепаратрис можно судить по рис.3. Устойчивые ветви, как правило, приходят из бесконечности. Неустойчивые притягиваются к устойчивым неподвижным точкам. Бассейны аттракторов также легко определяются по картине фазовой плоскости. Границами бассейнов являются устойчивые ветви сепаратрис седловых точек.