ЛЕКЦИЯ #27
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ - 5

§ 27.1 Тормозное излучение во внешнем поле

◆ Рассмотрим процесс спонтанного тормозного излучения в присутствии внешнего поля монохроматической волны. В отличие от расчета. проведенного в предыдущих параграфах, мы учтем влияние внешнего поля тем же способом, который был использован при рассмотрении ВТЭ в § 21.1. Вместо плоских волн, описывающих свободное движение электрона (§ 26.2/16), опишем начальное и конечное состояния квазиэнергетическими функциями электрона в сильном поле, найденными в §18.3:

$$\Psi_p(\vec{r},t) = \mathcal{N} \exp i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}\cdot\varphi(t), \tag{1}$$

$$\varphi(t) = \exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m}t - \frac{e\vec{p}\vec{E}}{m\omega^2}\cos\omega t + \frac{e^2\vec{E}^2}{4m\omega^2}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\right]. \tag{2}$$

Считая, что в описании процесса рассеяния можно ограничиться борновским приближением, опишем процесс перехода во втором порядке теории возмущений. Составной матричный элемент будет включать матричный элемент оператора взаимодействия с квантованным полем, описывающий излучение фотона с частотой $\tilde{\omega}$,

$$\hat{V}^+(t) = -\frac{eu}{mc}\hat{\vec{p}}\frac{\vec{e}}{\sqrt{\tilde{\omega}}}\hat{a}^+e^{i\tilde{\omega}t}, \tag{3}$$

и матричный элемент оператора внешнего потенциала $U(\vec{r})$, описывающий амплитуду рассеяния в борновском приближении,

$$U_{12}(t) = A(\vec{q})\,\exp i[\Delta t + z\sin\omega t], \tag{4}$$

где $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ есть изменение импульса электрона при рассеянии (ср. §21.1),

$$\Delta = \frac{1}{2m\hbar}\left(p_2^2 - p_1^2\right) \tag{5}$$

есть частотная разность квазиэнергий начального и конечного состояний, а

$$z = \frac{e\vec{q}\vec{E}}{\hbar m\omega^2} \sim \beta \tag{6}$$

где β есть параметр квантовой теории возмущений для переходов в непрерывном спектре. Используя разложение (14) в ряд Фурье, получаем выражение для сечения рассеяния электрона в телесный угол $d\Omega_1$, сопровождаемого спонтанным излучением фотона с поляризацией $\vec{e}$ в спектральный интервал $d\tilde{\omega}$ и телесный угол $d\Omega_2$ - и одновременным поглощением n квантов внешнего поля:

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^4} \cdot \frac{e^2}{\hbar^5 c^3} \sum_n \frac{p_{2n}}{p_1} (\vec{e}\vec{q}_n)^2 \left| A(\vec{q}_n) \right|^2 J_n^2 \left[z(q_n) \right] d\Omega_1 d\Omega_2 \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}}, \qquad (7)$$

где $J_n(x)$ есть функция Бесселя, а значение конечного импульса p_{2n} определяется законом сохранения энергии,

$$\frac{p_{2n}^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \hbar(n\omega - \tilde{\omega}). \qquad (8)$$

◆ Спектральная интенсивность $S(\omega)$ спонтанного тормозного излучения во внешнем поле получится из выражения (17) при фиксированном направлении начального импульса $\vec{p}_1$ относительно вектора поля $\vec{E}$ суммированием по двум поляризациям, интегрированием по четырем сферическим углам и суммированием по степеням многоквантовости n. Аналитическое вычисление $S(\omega)$ представляет большие трудности. Некоторые качественные особенности процесса могут быть выявлены непосредственно из выражения (7). Наиболее интересен случай резонансного излучения гармоник,

$$\tilde{\omega} = n\omega, \qquad (9)$$

при рассеянии на кулоновском потенциале. При условии (9) величина переданного импульса q может быть сколь угодно мала, что ведет к росту сечения. Поведение сечения излучения кванта n-й гармоники определится конкуренцией растущего при малых q множителя $\left| A(q) \right|^2 \sim q^{-4}$ и множителей $(\vec{e}\vec{q})^2$ и $J_n^2[z(q)]$, убывающих при $q \to 0$ и $n \geq 1$. Уже при $n = 1$ их зависимости от q компенсируются, $d\sigma \sim q^0$, а при $n \geq 2$ рассеяние вперед подавлено. Таким образом, резонансная структура спектра высших гармоник выражена слабо.

★ По грубым оценкам, спектральная ширина Γ резонанса с $n = 2$ есть $\Gamma \sim E_n / \hbar\beta$, где E_n - начальная энергия электрона, а β - квантовый параметр силы поля. При $E_n = 1\mathrm{Ry}$ и $\omega = \omega_s$ отсюда $\Gamma \sim 12\omega/\beta$, и резонансы заметны только в исключительно сильных полях с $\beta >> 12$.

§ 27.2 *Рассеяние света на свете*

◆ Выше рассматривались, в основном, те процессы, которые в принципе могли происходить и при вакуумном начальном состоянии поля. Перейдем к рассмотрению другого класса - процессов *рассеяния:* переходов, при которых исчезает один фотон моды λ_1 и испускается фотон моды λ_2. Поскольку при рассеянии изменяются состояния двух мод поля, то описание такого процесса требует, как минимум, описания процессов во втором порядке теории возмущений по оператору $\hat{V}_1$ и/или в первом порядке по оператору $\hat{V}_2$.

◆ Простейшим в физическом смысле является процесс рассеяния света на свете. Оценим величину сечения этого процесса, построив феноменологический оператор $\hat{V}_\gamma$ взаимодействия низкочастотных ($\hbar\omega << mc^2$) фотонов. В квантовой теории характерный масштаб напряженности поля, ограничивающий применимость линейных уравнений поля в вакууме, равен

$$\mathcal{E}_{NL} = \frac{m^2c^3}{e\hbar} = 4.44 \cdot 10^{13} \text{ Гс}. \tag{10}$$

В поле такой напряженности работа по перемещению электрона на расстояние, равное комптоновской длине волны $\lambda_c = \hbar/mc$, сравнима с пороговой энергией рождения электрон-позитронной пары:

$$A = e\mathcal{E}_{NL}\lambda_c = mc^2. \tag{11}$$

Структура оператора взаимодействия фотонов $\hat{V}_\gamma$ определяется следующими соображениями.

① Оператор $\hat{V}_\gamma$ должен иметь размерность плотности энергии - как и оператор плотности энергии свободного электромагнитного поля (см. §22.2).

② Оператор $\hat{V}_\gamma$ должен быть скаляром, поэтому он может зависеть только от функций $\vec{H}^2$, $\vec{E}^2$ и $\left(\vec{E}\vec{H}\right)^2$.

③ Взаимодействие фотонов возникает в результате редукции взаимодействия электромагнитного поля и виртуальных электрон-позитронных пар. Поэтому заряд электрона e и напряженности полей должны входить в $\hat{V}_\gamma$ в одинаковых степенях.

④ При изменении знака заряда электрона физическая картина мира останется неизменной. Поэтому масштаб нелинейности $\mathcal{E}_{NL}$ должен входить в $\hat{V}_\gamma$ в четной степени.

Предполагая, что оператор $\hat{V}_\gamma$ обладает минимальной нелинейностью - пропорционален четвертой степени поля, для типичного члена получаем оценку

$$\hat{V}_\gamma \sim \alpha\mathcal{E}^4\mathcal{E}_{NL}^{-2}. \tag{12}$$

Матричный элемент этого оператора, соответствующий процессу рассеяния фотона на фотоне, имеет порядок величины

$$V_\gamma \sim \alpha\left(\frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}_{NL}}\right)^2. \tag{13}$$

Для вычисления скорости переходов используем золотое правило Ферми. Поскольку состояние одного из конечных фотонов однозначно определяет состояние другого (в силу законов сохранения энергии и импульса), плотность конечных состояния равна плотности состояний для одного фотона. В итоге для полного сечения рассеяния фотона на фотоне получаем оценку

$$\sigma_\gamma \sim \alpha^{18} a_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_a} \right)^6 . \tag{14}$$

★ При точном расчете (H. Euler, 1936) в выражение для сечения входит числовая константа $K = 0.062$. На стандартной частоте сечение рассеяния фотона на фотоне имеет величину $\sigma_\gamma = 1.45 \cdot 10^{-65}$ см^2. При пересечении двух предельно сфокусированных (объем фокальной области $V \approx \lambda^3$) импульсов фемтосекундных ($\tau \approx 10^{-14}$ с) лазеров с интенсивностью $I \approx 10^{18}$ Вт см$^{-2}$ вероятность рассеяния пары фотонов за один импульс $W \sim 10^{-28}$.

§ 27.3 Рассеяние света на электроне

◆ До сих пор задача о квантовом описании процесса рассеяния света на свободном электроне оставалась за пределами возможностей наших методов (например, квазиэнергетическая ВФ электрона в однородном переменном поле, найденная в §19.2, приводила к **нулевому** сечению рассеяния в противоречии как с классической теорией [ЛЛII, §72], так и с экспериментом). Рассмотрим эту задачу с использованием квантовой модели поля. Начальное и конечное состояния электрона будем описывать плоскими волнами:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp i \frac{\vec{p}_1 \vec{r}}{\hbar}, \qquad \psi_k = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp i \frac{\vec{p}_2 \vec{r}}{\hbar}. \tag{15}$$

Оператор взаимодействия возьмем в pA-калибровке. Удобно проводить рассмотрение в системе координат, в которой в начальный момент электрон покоится: $\vec{p}_1 = 0$. В этой системе матричные элементы оператора $\hat{V}_1$ обратятся в ноль, и процесс будет определяться матричным элементом оператора

$$\hat{V}_2 = \frac{e^2}{2mc^2} \hat{\vec{A}}^2 \tag{16}$$

Матричный элемент перехода из состояния с одним фотоном в моде $(\vec{k}_1, \vec{e}_1)$ в состояние с одним фотоном в моде $(\vec{k}_2, \vec{e}_2)$ есть

$$V_{kn} = \frac{e^2 u^2}{mc^2 \sqrt{\omega_1 \omega_2}} (\vec{e}_1 \vec{e}_2) \int_{L^3} \exp i \left(\vec{k}_1 - \frac{\vec{p}_2}{\hbar} - \vec{k}_2 \right) \vec{r} \, d\vec{r} . \tag{17}$$

Это выражение отлично от нуля только при выполнении закона сохранения импульса: $\hbar\vec{k}_1 + \vec{p}_1(=0) = \hbar\vec{k}_2 + \vec{p}_2$. При выполнении такого равенства матричный элемент принимает вид

$$V_{kn} = \frac{2\pi\hbar e^2}{m\sqrt{\omega_1\omega_2}}(\vec{e}_1\vec{e}_2). \tag{18}$$

В силу закона сохранения импульса конечное состояние системы полностью определяется заданием моды $(\vec{k}_2, \vec{e}_2)$ конечного фотона. Поскольку переданная электрону при рассеянии энергия,

$$\Delta E \sim \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{2m}, \tag{19}$$

мала в сравнении с энергией оптического фотона, $\Delta E/\hbar\omega \sim \hbar\omega/mc^2 \sim 10^{-6}$, то в низшем приближении можно считать рассеяние упругим $(\omega_1 = \omega_2)$. Используя золотое правило Ферми и взяв в качестве $\rho(E)$ плотность конечных состояний фотона, получаем для сечения рассеяния света на свободном электроне выражение

$$d\sigma(\vec{k}_2) = \alpha^4 a_0^2 (\vec{e}_1\vec{e}_2)^2 d\Omega, \tag{20}$$

совпадающее с классическим (томсоновским) выражением. Квантовые поправки к этому выражению имеют порядок $\sim \hbar\omega/mc^2$ и уменьшают сечение.

§ 27.4 *Давление света*

◆ Квантовая теория дает легкий способ расчета силы светового давления на свободный электрон. При упругом рассеянии фотона на угол θ электрону передается импульс

$$\Delta p_x = \frac{\hbar\omega}{c}(1 - \cos\theta) \tag{21}$$

Отсюда средняя сила светового давления

$$\vec{f}_{rp} = r_0^2 \frac{I}{\hbar\omega}\vec{n} \cdot \frac{\hbar\omega}{c}\int(1-\cos\theta)\cos^2\theta d\Omega = \vec{n}\frac{4\pi}{3}r_0^2 \frac{I}{c} \tag{22}$$

★ В стандартных условиях $f_s = 1.1 \cdot 10^{-20}$ дин, что соответствует ускорению электрона $a_s = 1.2 \cdot 10^7$ см с$^{-2}$. За время действия лазерного импульса $\tau_s = 10^{-8}$ с электрон приобретет среднюю скорость $v_s = 0.12$ см с$^{-1}$.

☆ Какую скорость приобретет электрон в результате рассеяния **одного** фотона? Сравнить и согласовать с приведенным выше значением.

◆ Формула (22) не содержит постоянной Планка и потому должна получаться и в классической теории. В поле плоской электромагнитной волны

($\vec{E} = E_z \sin(kx - \omega t)$, $\vec{H} = H_y \sin(kx - \omega t)$, $\vec{S} = S_x$) в дипольном приближении на частицу в направлении распространения волны действует компонента силы Лоренца

$$f_L = \frac{ev}{c} H_y = \frac{e^2}{m\omega c} E_z H_y \sin 2\omega t, \tag{23}$$

среднее значение которой равно нулю. Для того, чтобы поток энергии между частями системы (полем и зарядом) был однонаправленным, нужно учесть диссипацию - радиационное трение [ЛЛII, §75]. Уравнение движения для x - компоненты координаты примет вид

$$m\ddot{x} + \frac{2e^2\omega^2}{3c^3}\dot{x} = e\mathcal{E}\sin\omega t, \tag{24}$$

откуда находится величина сдвига фаз между колебаниями координаты (и скорости) электрона и колебаниями электрического поля:

$$\varphi_r \sim \frac{e^2\omega}{mc^3} \approx 1.6 \cdot 10^{-8}. \tag{25}$$

Отсюда получается оценка силы светового давления:

$$f_{rp} \sim f_L \varphi_r \sim \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{I}{c} \approx \sigma_T \frac{I}{c}. \tag{26}$$

В классической электродинамике сила радиационного давления появляется как среднее значение силы Лоренца в направлении распространении волны, найденное с учетом сдвига фаз из-за радиационного трения. Выражение для силы радиационного давления совпадает с результатом квантовой теории.

☆ Максимальная величина сечения рассеяния света на атоме $\sigma_+ \sim \lambda^2$, где λ - длина волны света (§ 12.1). В стандартных условиях эта величина на 18 порядков больше сечения рассеяния света на свободном электроне. Простейшая оценка для резонансного рассеяния света на атоме дает $v_s \sim 100c$, что явно указывает на возможность ускорения до релятивистских скоростей. Почему в действительности это не происходит?

EOL ☯