# *ЛЕКЦИЯ #26*
# *ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ - 4*

## *§ 26.1 Спонтанное излучение как релаксация - 2*

◆ Если электромагнитное поле в начальный момент находится не в вакуумном состоянии, то скорость релаксации может увеличиться за счет процессов вынужденного излучения. Пусть внешнее поле с интенсивностью $I$ имеет узкий спектр ширины $\Delta\omega << \Gamma_0$, где $\Gamma_0$ - естественная ширина линии, с центральной частотой, равной частоте перехода $\omega_t$. Тогда скорость перехода, пропорциональная $\Gamma$, может быть связана соотношением

$$\Gamma = \Gamma_0\left(1 + I\frac{\lambda^3}{\hbar c}\cdot\frac{1}{\Gamma}\right) \tag{1}$$

Вызванное внешним полем уширение становится существенным при

$$I \geq \Gamma_0\frac{\hbar c}{\lambda^3} \tag{2}$$

Используя оценку естественной ширины линии, отсюда находим пороговое значение напряженности поля для уширения линии:

$$\mathcal{E}_\Gamma = \alpha^3\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^3\mathcal{E}_a \tag{3}$$

При стандартных условиях $\mathcal{E}_\Gamma = 5.26\cdot10^{-4}$ Гс , что соответствует интенсивности $I_\Gamma = 3.30\cdot10^{-5}\,\text{Вт}\,\text{см}^{-2}$.

☆ Рассмотреть условия, при которых возможно наблюдение эффекта уширения линии внешним широкополосным $(\Delta\omega >> \Gamma)$ излучением.

Если в равенстве (3) доминирует второй член в скобках, то ширина линии $\Gamma$ растет пропорционально напряженности поля. Подставляя для естественной ширины линии оценку $\Gamma_0 \sim d^2\omega^3\hbar^{-1}c^{-3}$, получаем в этом случае

$$\Gamma \approx \pi\frac{d\mathcal{E}}{\hbar} = \pi\Omega, \tag{4}$$

где $\Omega$ - частота Раби. В полях столь большой величины уже нельзя пренебрегать ни переходами с нижнего уровня на верхний, ни высшими порядками теории возмущений. Тем не менее, оценка (4) "согласуется" с найденным в классической теории временем "вынужденного распада" одного из состояний двухуровневой системы ((ср. §10.3, ф-ла (14)).

◆ Рассмотрим изменение внешним полем скорости процесса двухфотонного перехода (ср. §25.1). В пренебрежении зависимостью "ядра" $\Sigma_{nk}$ составного матричного элемента от частоты, величина скорости спонтанного перехода дается выражением

$$\dot{W}_{d2} = \left|\Sigma_{nk}\right|^2 \frac{\omega_1^3\omega_2^3}{(2\pi)^3 c^6 \hbar^2} d\Omega_1 d\Omega_2 d\omega_1 \tag{5}$$

При наличии внешнего поля составной матричный элемент примет вид

$$\tilde{V}^{(2)} = \tilde{V}_s^{(2)} \left(n_\lambda + 1\right)_1 \left(n_\lambda + 1\right)_2 \tag{6}$$

Если частота внешнего поля не слишком близка к половине частоты двухфотонного перехода ($\left|2\omega_i - \omega_t\right| >> \Delta\omega$), то один из фотонов излучается вынужденным, а второй - спонтанным образом. Скорость переходов в отсутствие внешнего поля пропорциональна интегралу

$$J_s = \int_0^{\omega_t} \omega_1^3\omega_2^3 d\Omega_1 d\Omega_2 d\omega_1 = \frac{\pi^2}{105}\omega_t^7 \tag{7}$$

В присутствии внешнего поля к этой величине добавляется интеграл

$$\begin{aligned} J_i &= \int_0^{\omega_t} \omega_1^3\omega_2^3 \left\{\frac{I}{d\Omega_1 d\omega_1} \cdot \frac{\lambda^3}{\hbar c}\right\} d\Omega_1 d\Omega_2 d\omega_1 = \\ &= \omega_t^6 x^3 (1-x)^3 I \frac{\lambda^3}{\hbar c} \cdot \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \tag{8}$$

где $x = \omega_i / \omega_t$ есть отношение частоты внешнего поля к частоте перехода. Такая оценка интеграла $J_i$ возможна, если ширина $\Delta\omega$ спектра падающего излучения мала (всего лишь) в сравнении с $\omega_t$. Пусть для определенности $x = 1/3$. Тогда скорость (однофотонно) индуцированного двухфотонного перехода дается выражением

$$\dot{W}_{d2i} = 0.117\,\dot{W}_{d2s} \frac{I}{I_V} \tag{9}$$

где характерный масштаб интенсивности $I_V$, определяющий меру увеличения скорости двухфотонного перехода, есть

$$I_V = \hbar\omega_t c\lambda^{-3} = 4.63 \cdot 10^3\ \text{Вт}\,\text{см}^{-2}. \tag{10}$$

Скорость индуцированных двухфотонных переходов станет сравнима со скоростью разрешенных дипольных переходов при интенсивности внешнего излучения $I \approx 8.55\alpha^{-3} I_V \approx 10^{11}\ \text{Вт}\,\text{см}^{-2}$.

☆ Вычислить интенсивность $I_V$ излучения (стандартной частоты), при которой фотонный газ будет обладать концентрацией "один фотон в кубе со стороной, равной длине волны".

ОТВЕТ. $I_V = \hbar\omega_t c\lambda^{-3} = 4.63 \cdot 10^3\ \text{Вт}\,\text{см}^{-2}$

☆ Рассмотреть кинетику двухфотонного вынужденного перехода в вырожденном случае ($|2\omega_i - \omega_t| << \Delta\omega$), когда частота внешнего поля равна половине частоты перехода и оба фотона излучаются вынужденно.

## § 26.2 Тормозное излучение

◆ При рассмотрении спонтанных однофотонных переходов между состояниями **дискретного** энергетического спектра системы $S$ энергетический спектр испущенных фотонов также дискретен: он определяется значениями энергий уровней системы $E_k$, лежащих ниже начального уровня $E_n$. Для переходов в состояния **непрерывного** энергетического спектра возможны процессы с испусканием фотона любой энергии в интервале $E_n \geq \hbar\omega \geq 0$. Поэтому процесс такого спонтанного перехода следует описывать дифференциальным сечением $d\sigma$ перехода с испусканием одного фотона в заданном интервале энергий и углов $d(\hbar\omega)d\Omega$. Легко оценить порядок величины такого сечения. Задача может быть характеризована двумя безразмерными переменными - долей начальной энергии электрона, перешедшей в излучение,

$$x = \frac{\hbar\omega}{E_n}, \tag{11}$$

и отношением начальной энергии электрона к атомному масштабу,

$$y = 2\frac{E_n}{E_a}. \tag{12}$$

Поскольку оператор излучения одного фотона в дипольном приближении $\hat{V}^+$ не зависит от скорости света $c$ (см. §25.1), зависимость $d\sigma$ от $\alpha$ определяется **только** вкладом плотности конечных состояний фотона (она $\sim\alpha^3$). В итоге

$$d\sigma = \alpha^3 a_0^2 f(x,y)\frac{d\omega}{\omega}d\Omega \tag{13}$$

где $f(x,y)$ - неизвестная функция (такая, что при $x,y\sim 1$ также $f\sim 1$).

★ Сечения процессов, разрешенных в дипольном приближении, зависят от постоянной тонкой структуры очевидным образом: каждый начальный (поглощенный) фотон вносит в сечение множитель $\alpha$, а каждый конечный (испущенный) - множитель $\alpha^3$. Для примера сошлемся на сечение однофотонной ионизации $\sigma\sim\alpha$ (§3.2) и на сечение (нерезонансного) рассеяния света на атоме $\sigma\sim\alpha^4$ (§1.3 и §6.1).

◆ Свободный электрон не может испустить фотон. Спонтанное излучение при переходе между состояниями непрерывного спектра - оно называется *тормозным излучением* - возможно только в присутствии внешнего статического поля с потенциалом $U(\vec{r})$. Рассмотрим простейшее приближение, в котором потенциал $U(\vec{r})$ рассматривается как возмущение, а начальное и конечное состояния электрона описываются ВФ свободной частицы - плоскими волнами

$$\psi_n = \exp i\frac{\vec{p}_1\vec{r}}{\hbar}, \qquad \psi_k = \exp i\frac{\vec{p}_2\vec{r}}{\hbar} \tag{14}$$

Эти функции будем считать подчиненными тому же условию периодичности на гранях куба с ребром $L=1$, что и ВФ электромагнитного поля. В нашей задаче оператор возмущения имеет вид $U(\vec{r})+\hat{V}^+$; оператор излучения $\hat{V}^+$ мы возьмем в виде

$$\hat{V}^+(t) = -\frac{eu}{mc}\hat{\vec{p}}\sum_\lambda \frac{\vec{e}_\lambda}{\sqrt{\omega_\lambda}}\hat{a}^+_\lambda e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}. \tag{15}$$

Используя дипольное приближение, далее будем полагать в этом выражении $\vec{k}=0$. Интересующий нас процесс излучения при рассеянии описывается составным матричным элементом второго порядка теории возмущений

$$\widetilde{V}^{(2)}_{kn} = \sum_i \frac{U_{ki}V^+_{in}}{E_n - E_i} + \sum_j \frac{V^+_{kj}U_{jn}}{E_n - E_j} \tag{16}$$

Энергии начального и конечного состояния системы "электрон + фотон" должны быть равны. Поэтому

$$E_n = \frac{p_1^2}{2m} = E_k = \frac{p_2^2}{2m} + \hbar\omega. \tag{17}$$

Входящие в (16) компоненты вычисляются элементарно. Для оператора излучения в дипольном приближении отличен от нуля только матричный элемент перехода в состояние с тем же импульсом ($\vec{p}_i = \vec{p}_1$):

$$\left\langle \vec{p}_i, \vec{k}\left|\hat{V}^+\right|\vec{p}_1, 0\right\rangle = -\frac{eu}{mc}\cdot\frac{\vec{e}_1\vec{p}_1}{\sqrt{\omega_\lambda}} \tag{18}$$

Матричный элемент оператора $U(\vec{r})$ есть

$$\left\langle \vec{p}_2\left|U(\vec{r})\right|\vec{p}_1\right\rangle = \int U(\vec{r})\exp i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}d\vec{r} \tag{19}$$

где $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ есть изменение импульса электрона при рассеянии (ср. §21.1). Неизменность импульса электрона при взаимодействии с полем приводит к тому, что в составном матричном элементе вклад в сумму по промежуточным состояниям дадут только состояния с $\vec{p}_i = \vec{p}_1$ и $\vec{p}_j = \vec{p}_2$; поэтому

$$E_n - E_i = -\hbar\omega, \qquad E_n - E_j = \hbar\omega \tag{20}$$

Итак, $\widetilde{V}^{(2)}_{kn}$ зависит только от величины переданного импульса:

$$\tilde{V}_{kn}^{(2)} \approx -\frac{eu}{mc} \cdot \frac{\vec{e}_1\vec{q}}{\omega^{3/2}} A(\vec{q}) \tag{21}$$

В конечном состоянии системы имеются две частицы в состояниях непрерывного спектра - электрон и фотон. Возможные состояния этих частиц ограничены только законом сохранения энергии. Поэтому плотность конечных состояний имеет вид

$$\rho(E_k) = \rho_2(E_k - \hbar\omega)\rho_1(\hbar\omega)d\hbar\omega, \tag{22}$$

где $\rho_2(E)$ есть плотность состояний электрона,

$$\rho_2(E) = \frac{\sqrt{2m^3E}}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega_e, \tag{23}$$

а $\rho_1(\hbar\omega)$ - плотность состояний фотона,

$$\rho_1(\hbar\omega) = \frac{\omega^2}{\hbar(2\pi c)^3} d\Omega_{ph}. \tag{24}$$

Формулы $(\tilde{V})$ и $(\rho)$ вместе с золотым правилом Ферми $(GR)$ (см. §3.1 и §10.1) определяют дифференциальное сечение тормозного излучения.

◆ Закончим расчет дифференциального сечения тормозного излучения. Подстановка выражений для составного матричного элемента и плотности состояния в золотое правило Ферми дает выражение для скорости перехода

$$\dot{W} = \frac{1}{16\pi^4} \cdot \frac{e^2 p_2}{\hbar^5 mc^3\omega} \sum_{1,2} (\vec{e}_n\vec{q}) |A(\vec{q})|^2 d\Omega_e d\Omega_{ph} d\omega. \tag{25}$$

Сечение перехода определяется как отношение скорости перехода к плотности потока электронов $J$ в начальном состоянии $J = p_1/m$. Итак, сечение перехода, при котором электрон рассеивается в элементарный телесный угол $d\Omega_e$, а фотон с частотой в интервале $d\omega$ вблизи частоты $\omega$ излучается в телесный угол $d\Omega_{ph}$, дается формулой

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^4} \cdot \frac{e^2 p_2}{\hbar^5 c^3 p_1\omega} \sum_{1,2} (\vec{e}_n\vec{q})^2 |A(\vec{q})|^2 d\Omega_e d\Omega_{ph} d\omega. \tag{26}$$

Определим *спектральное сечение* тормозного излучения $d\sigma_\omega$ - сечение рассеяния с испусканием фотона в интервале частот $d\omega$. Выражение для $d\sigma_\omega$ получится интегрированием выражения (2) по четырем угловым переменным. Три интегрирования могут быть проведены в общем виде; в итоге

$$d\sigma_\omega = \frac{1}{3\pi^2} \cdot \frac{e^2 p_2}{\hbar^5 c^3 p_1\omega} \int |A(\vec{q})|^2 q^2 d\cos\theta\, d\omega, \tag{27}$$

где $\theta$ - угол рассеяния электрона. Рассмотрим практически важный случай рассеяния на кулоновском потенциале $U(r) = -Ze^2 r^{-1}$. Для этого случая

$$A(q) = -4\pi Z e^2 \hbar^2 q^{-2}, \tag{28}$$

и оставшееся интегрирование по $\theta$ тоже элементарно:

$$d\sigma_\omega = \alpha^3 a_0^2 \left[ \frac{16}{3} Z^2 \frac{1}{y} \ln\left( \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} \right) \right] \frac{d\omega}{\omega}, \tag{29}$$

где $x = \hbar\omega / E_n$ и $y = 2E_n / E_a$ суть введенные ранее безразмерные переменные. При $\omega \to 0$ спектральное сечение растет как $\omega^{-1}|\ln \omega|$, а при приближении энергии испущенного кванта к начальной энергии электрона, $x \to 1$, $d\sigma_\omega$ стремится к нулю как $\sqrt{1-x}$.

◆ Формула (5) имеет ограниченную область применимости. Если энергия электрона в конечном состоянии $E_f = p_2^2 / 2m$ не велика в сравнении с характерной атомной энергией $E_a$ (а это всегда будет так при $x \to 1$), то применение борновского приближения некорректно. Вычисление с помощью точных ВФ в кулоновском потенциале **притяжения** приводит в области $E_n >> \hbar\omega_a$, $E_f << \hbar\omega_a$ к формуле

$$d\sigma = \alpha^3 a_0^2 \left[ \frac{64\pi}{3} Z^3 \frac{1}{y^{3/2}} \left\{ 1 - \exp\left( -\frac{2\pi Z}{\sqrt{y(1-x)}} \right) \right\}^{-1} \right] \frac{d\omega}{\omega} \tag{30}$$

★ При $y(1-x) >> 1$ функции в прямоугольных скобках в формулах (5) и (6) имеют одинаковую асимптотику. Поэтому при $y >> 1$ эти формулы позволяют описать весь спектр тормозного излучения.

При $x \to 1$ выражение (30) стремится к **конечному** пределу

$$d\sigma = \frac{32\pi}{3} Z^2 \alpha^3 a_0^2 y^{-3/2} \frac{d\omega}{\omega}. \tag{31}$$

Конечная величина спектрального сечения тормозного излучения на **синей** границе имеет то же происхождение, что и конечность сечения однофотонной ионизации системы с кулоновским потенциалом (притяжения) на **красной** границе (см. §3.2) и связана с тем, что граница дискретного и непрерывного спектров в таких системах не является экспериментально выделенной точкой.

◆ Сечение рассеяния с излучением фотона вычислялось как поправка второго порядка теории возмущений к сечению рассеяния без испускания фотонов, которое имеет в борновском приближении вид

$$d\sigma_B = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|A(\vec{q})\right|^2 d\Omega_2 . \qquad (32)$$

С использованием этого выражения формула для сечения тормозного излучения может быть переписана в виде

$$d\sigma = d\sigma_B \alpha \frac{p_2}{4\pi^2 p_1}\cdot\frac{d\omega}{\omega}\sum_{1,2}\left(\frac{\vec{e}_n\vec{q}}{mc}\right)^2 d\Omega_{ph} \qquad (33)$$

Вероятность рассеяния с испусканием одного фотона определяется интегралом по $d\omega$, логарифмически расходящимся на нижнем пределе и оказывается бесконечной. Эта расходимость называется *инфракрасной катастрофой* и отражает неприменимость теории возмущений для описания низкочастотного излучения.

★ Практических трудностей инфракрасная катастрофа не вызывает, так как в экспериментах фиксируется лишь излучение с частотой выше некоторого порога, $\omega > \omega_L$. Для того, чтобы вероятность рассеяния с испусканием одного фотона в интервале частот от $\omega_L$ до $\omega_H = E_n/\hbar$ стала сравнима с вероятностью упругого рассеяния, величину $\omega_L$ следует взять ничтожно малой:

$$\omega_L \sim \omega_H \exp\left(-\alpha^{-3}\frac{\hbar\omega_a}{E_n}\right). \qquad (34)$$

Даже при $E_n = mc^2$ это дает $\omega_L \sim 10^{-39}$ с$^{-1}$. Период осцилляций такого поля примерно в $10^{22}$ раз больше возраста Вселенной.

EOL ☯