# ЛЕКЦИЯ #25
# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ - 3

## § 25.1 Скорости спонтанных переходов при сильных запретах

◆ Рассмотрим спонтанные переходы с уровня $2s_{1/2}$ в атоме водорода. Единственным разрешенным дипольным переходом будет переход на уровень $2p_{1/2}$, который за счет лэмбовского сдвига лежит ниже уровня $2s_{1/2}$. Частота перехода между ними весьма мала, $\omega_L = 0.41\alpha^3\omega_a$; она лишь на порядок превосходит радиационную ширину нижнего уровня $\Gamma_{2p} = 0.039\alpha^3\omega_a$. Скорость такого перехода по оценке (L24/13) имеет величину $\dot{W}_d \approx 0.07\alpha^{12}\omega_a$. Количественный расчет приводит к значению $\dot{W}_d \approx 0.83\alpha^{12}\omega_a \approx 7.8\cdot 10^{-10}\,\text{c}^{-1}$.

◆ Другим возможным процессом перехода является магнитный дипольный переход между уровнями $2s_{1/2}$ и $1s_{1/2}$. Частота перехода $\omega_t = 0.375\omega_a$ близка к атомной, но матричный элемент этого перехода весьма мал. Поскольку орбитальный момент электрона и в начальном, и в конечном состоянии равен нулю, то $l_{nk} = 0$ и переход определяется оператором спинового момента. Однако при вычислении значения $\vec{m}_{nk}$ по формуле

$$\vec{m}_{nk} = \langle\chi_k|\mu_0\hat{\vec{\sigma}}|\chi_n\rangle\cdot\int\psi_{1s}(\vec{r})\psi_{2s}(\vec{r})d\vec{r} \qquad (1)$$

с помощью нерелятивистских волновых функций $\psi_{1s}(\vec{r})$ и $\psi_{2s}(\vec{r})$ интеграл обращается **в ноль** из-за их ортогональности. Отличным от нуля значение интеграла становится при добавлении к гамильтониану оператора релятивистских поправок $\hat{V}_R$, учитывающего релятивистскую зависимость энергии от импульса, контактное и спин-орбитальное взаимодействия. Характерная величина матричных элементов этого оператора в атомных единицах порядка $\alpha^2$. Поэтому значение коэффициентов при волновых функциях, добавляемых к исходной в первом порядке теории возмущений, а с ними и входящего в выражение для $\vec{m}_{nk}$ интеграла будет порядка $\alpha^2$, и матричный элемент рассматриваемого перехода $|\vec{m}_{nk}| \sim \mu_0\alpha^2$. По скейлинговой формуле (L24/21) получаем оценку $\dot{W}_m \approx 5.3\cdot 10^{-2}\alpha^9\omega_a$. Количественный расчет дает значение $\dot{W}_m \approx 1.03\cdot 10^{-3}\alpha^9\omega_a \approx 2.49\cdot 10^{-6}\,\text{c}^{-1}$.

★ Практически все запрещенные переходы оказываются разрешены в высших приближениях - при уточнении исходной модели. Чаще всего роль снимающих запреты возмущений играют оператор релятивистских поправок $\hat{V}_{rel} \sim \alpha^2$ и оператор сверхтонкого взаимодействия $\hat{V}_{hl} \sim \alpha^2\zeta$. Наблюдение сильно запрещенных переходов требует особых условий: атом должен оставаться изолированным в течение времени, сравнимого со временем радиационного распада. Такие условия существуют во внешних слоях атмосферы небесных тел (высокие слои ионосферы Земли, корона Солнца) и в межзвездном пространстве. Третий фактор, ведущий к снятию запретов - наложенное на систему внешнее (обычно электрическое) поле.

◆ Значительно более вероятным, чем рассмотренные выше процессы, является переход из состояния $2s_{1/2}$ в состояние $1s_{1/2}$ с испусканием **двух** фотонов. Такой процесс может быть описан во втором порядке теории возмущений по оператору $\hat{V}_1$ как переход $2s \to np$ с испусканием фотона частоты $\omega_1$ и последующий переход $np \to 1s$ с испусканием фотона частоты $\omega_2$.

☆ Можно ли описать этот процесс в *первом* порядке теории возмущений по оператору $\hat{V}_2$?

Частоты фотонов должны удовлетворять соотношению $\omega_1 + \omega_2 = \omega_t$. Скорость такого перехода может быть вычислена с помощью золотого правила Ферми. В конечном состоянии системы имеется два фотона, связанных только условием постоянства суммарной энергии. Плотность конечных состояний имеет вид

$$\rho(E_k) = \rho_1(\hbar\omega_1)\rho_2(\hbar\omega_1)d(\hbar\omega_1). \tag{2}$$

В составном матричном элементе надо учесть, что при переходе $2s \to np$ может быть испущен как фотон $\omega_1$, так и фотон $\omega_2$. Составной матричный элемент принимает вид

$$\tilde{V}_{nk}^{(2)} = \sum_i \left[ \frac{V_{ki}^+ V_{in}^+}{E_{ni} - \hbar\omega_1} + \frac{V_{ki}^+ V_{in}^+}{E_{ni} - \hbar\omega_2} \right]. \tag{3}$$

Используя явный вид оператора взаимодействия $\hat{V}_1^+$ в дипольном приближении, имеем для составного матричного элемента выражение

$$\tilde{V}_{nk}^{(2)} = \frac{u^2\sqrt{\omega_1\omega_2}}{c^2\hbar} \sum_i \left[ \frac{(\vec{d}_{ki}\vec{e}_1)(\vec{d}_{in}\vec{e}_2)}{\omega_{ni} - \omega_1} + \frac{(\vec{d}_{ki}\vec{e}_2)(\vec{d}_{in}\vec{e}_1)}{\omega_{ni} - \omega_2} \right] \tag{4}$$

где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ - векторы поляризации фотонов $\omega_1$ и $\omega_2$. Выражение для вероятности переходов получается подстановкой $\rho(E_k)$ и $\tilde{V}_{nk}^{(2)}$ в ЗПФ:

$$\dot{W}_{d2} = |\Sigma_{nk}|^2 \frac{\omega_1^3\omega_2^3}{(2\pi)^3 c^6\hbar^2} d\Omega_1 d\Omega_2 d\omega_1 \tag{5}$$

Здесь через $\Sigma_{nk}$ обозначена сумма, входящая в составной матричный элемент.

◆ Оценим скорость двухфотонного перехода. Плотность конечных состояний имеет максимум при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_t/2$. Поэтому для оценки $\Sigma_{nk}$ можно принять

$$\Sigma_{nk} \approx 2\frac{\left(\vec{d}_s\vec{e}_1\right)\left(\vec{d}_s\vec{e}_2\right)}{\left(\omega_t/2\right)} \tag{6}$$

Интегрируя по углам и суммируя про поляризациям, получаем скорости двухфотонного перехода с испусканием фотона в спектральном интервале $d\omega_1$ вблизи частоты $\omega_1$:

$$\dot{W}_{d2} = \frac{128}{9\pi}\cdot\frac{d_s^4\omega_1^3\omega_2^3}{\omega_t^2\hbar^2c^6}d\omega_1 \tag{7}$$

Интегрируя это выражение по частоте от $\omega_1 = 0$ до $\omega_1 = \omega_t$, получаем оценку для скорости спонтанного двухфотонного перехода:

$$\dot{W}_{d2} = \frac{32}{315\pi}\alpha^6\left(\frac{\omega_t}{\omega_a}\right)^5\omega_a \tag{8}$$

Подставляя сюда значение частоты перехода $\omega_t = 0.375\omega_a$, получаем оценку $\dot{W}_{d2} = 1.5\,\text{с}^{-1}$. Количественный расчет дает значение $\dot{W}_{d2} = 7.7\,\text{с}^{-1}$.

## *§ 25.2 Спонтанное излучение как релаксация*

◆ Переходы с излучением фотона свободного поля $(L \to \infty)$ происходят с постоянной скоростью. Нестационарность начального состояния ведет к возникновению уширения линии излучения - форма линии становится лоренцевой с шириной $\Gamma = \dot{W}/2$. Если поле ограничено резонатором, то его спектр можно рассматривать как квазинепрерывный только до тех пор, пока спектральная плотность мод существенно превосходит ширину линии. Спектральный интервал между модами кубического резонатора с ребром $L$ вблизи частоты $\omega$ есть

$$\Delta\omega = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\lambda}{L}\right)^3\omega \tag{9}$$

где $\lambda = 2\pi c\omega^{-1}$ - длина волны излучения. В оптическом диапазоне при значениях $L = 1\,\text{см}$ и $\lambda = 10^{-4}\,\text{см}$ получаем $\Delta\omega = 8\cdot10^{-14}\,\omega$, и при $\Gamma \sim \alpha^3\omega^3\omega_a^2 \sim 7\cdot10^{-10}\omega$ в спектральной полосе излучения лежит $N = \Gamma/\Delta\omega \sim 10^4$ уровней.

◆ Иная ситуация может сложиться для высоковозбужденных атомов. Рассмотрим ридберговский атом в состоянии с главным квантовым числом $n >> 1$ типа "круговая орбита" $(l \sim n)$. Для него ширина линии перехода

$$\Gamma \sim \alpha^3\omega_0 n^{-5} \tag{10}$$

(см. § 24.2). Спектральный интервал между модами вблизи частоты излучения такого атома может быть записан в виде

$$\Delta\omega = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\lambda_0}{L}\right)^3 n^6 \omega_a \qquad (11)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c\omega_a^{-1} = 45$ нм. Из условия $\Delta\omega = \Gamma$ получаем значение квантового числа $n$, при котором станет существенной дискретность частотного спектра резонатора:

$$n_d \approx 1.26\left(\frac{\alpha L}{\lambda_0}\right)^{3/11} \qquad (12)$$

При $L = 1$ см получаем $n_d \approx 9.5$. Таким образом, для ридберговских атомов можно создать условия, при которых радиационное взаимодействие атома осуществляется с небольшим числом мод резонатора и спонтанное излучение подавлено (см. §18.1).

★ Основная идея этого параграфа - та же, что была использована в §4.2 при рассмотрении условий перехода в квазиконтинуум плотного дискретного спектра. Однако роли атомной системы ($S$) и поля ($F$) поменялись местами: теперь у системы $S$ - одна резонансная частота, а у поля $F$ - плотный дискретный спектр.

☆ В нулевом приближении, при пренебрежении уширением линии, скорость спонтанного излучения дается интегралом

$$\dot{W}_0 = \frac{2\pi}{\hbar}\int_0^\infty |M_{nk}|^2 \omega\delta(\omega_{nk} - \omega) L^3 \frac{\omega^2}{\hbar(2\pi c)^3} d\omega d\Omega \qquad (13)$$

где $M_{nk}$ - **не зависящий** от частоты матричный элемент дипольного приближения. В первом приближении следует заменить дельта - функцию, описывающую форму линии излучения, на лоренцеву форму:

$$\dot{W}_1 = \frac{2\pi}{\hbar}\int_0^\infty |M_{nk}|^2 \omega \frac{\Gamma/\pi}{(\omega_{nk} - \omega)^2 + \Gamma^2} L^3 \frac{\omega^2}{\hbar(2\pi c)^3} d\omega d\Omega \qquad (14)$$

Подынтегральное выражение растет с увеличением $\omega$, и интеграл расходится. В чем причины этой расходимости и как их устранить? (Проверить, какие из использованных при записи (14) приближений сохраняют силу при переходе к высоким частотам).

EOL ☯