ЛЕКЦИЯ #24
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ - 2

§ 24.1 Число фотонов в моде - 2

◆ Рассмотрим лазер, работающий в непрерывном одномодовом режиме. Поле излучения внутри резонатора может быть характеризовано числом фотонов в моде (резонатора) n_i. С другой стороны (выходного зеркала) поле излучения может быть характеризовано числом фотонов в моде (излучения) n_e. Найдем связь между n_i и n_e. Если γ - скорость потерь резонатора, то интенсивность излучения непосредственно вне резонатора есть

$$I = n_i \frac{\hbar\omega}{\pi a^2}\gamma \tag{1}$$

где a - радиус пучка. Плотность фотонов в моде излучения равна

$$n_e = \frac{\lambda^3}{\hbar c} B(\omega,\Omega) = \frac{\lambda^3}{\hbar c} \cdot \frac{I}{\Delta\omega\Delta\Omega} \tag{2}$$

Пусть ширина пространственного спектра излучения определяется дифракцией:

$$\Delta\Omega = \frac{\pi\theta^2}{4\pi} = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \tag{3}$$

(здесь $\theta = \lambda/a$ - дифракционный угол). Ширина частотного спектра $\Delta\omega$ определяется *формулой Таунса* [К80, с.216]:

$$\Delta\omega = \frac{\hbar\omega^3}{PQ^2} \cdot \frac{N_2}{N_2 - N_1} \tag{4}$$

где P - мощность излучения ($P = n_i\hbar\omega\gamma$), Q - добротность резонатора ($Q = \omega/\gamma$), а N_2 и N_1 - населенности нижнего и верхнего уровней рабочего перехода лазера. В итоге получается соотношение

$$n_e = 8n_i^2\left(1 - N_1/N_2\right) \tag{5}$$

которое не содержит ни параметров ω, γ и a, ни фундаментальных констант $\hbar$ и c.

§ 24.2 Скорости спонтанных переходов при дипольном (E1) излучении

◆ Если в начальный момент поле находится в вакуумном состоянии, а система S находится в возбужденном состоянии, то единственным возможным процессом будет испускание фотона (или фотонов). Рассмотрим скорость испускания **одного** фотона: она определяется выражением

$$\dot{W} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle k,1_\lambda\left|\hat{V}_1\right|n,0_\lambda\right\rangle\right|^2 \rho_1(E_k), \tag{6}$$

где индексы n и k относятся к начальному и конечному состояниям, а энергия конечного фотона $E_k = \hbar\omega_{nk}$. Воспользуемся мультипольным разложением. Обозначим через $\hat{V}^+$ часть оператора $\hat{V}$, содержащую только операторы рождения. В дипольном приближении $\hat{V}^+ = -\hat{\vec{d}}\hat{\vec{E}}^+$, где $\hat{\vec{E}}^+$ есть часть оператора электрического поля, содержащего только $\hat{a}^+$:

$$\hat{V}^+ = -i\frac{u}{c}\hat{\vec{d}}\sum_\lambda \vec{e}_\lambda\sqrt{\omega_\lambda}\,\hat{a}^+_\lambda e^{i\omega_\lambda t} \tag{7}$$

В силу закона сохранения энергии в (7) входит матричный элемент, соответствующий переходу с испускание фотона с энергией $\hbar\omega_{nk}$. Поэтому

$$V_{nk} = i\frac{u}{c}\vec{d}_{nk}\vec{e}_\lambda\sqrt{\omega_{nk}} \tag{8}$$

Используя выражение для плотности однофотонных состояний

$$\rho_1(E_k) = L^3\frac{\omega_{nk}^2}{\hbar(2\pi c)^3}d\Omega \tag{9}$$

из (6) получаем выражение для скорости перехода

$$\dot{W}_d = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\left|\vec{d}_{nk}\vec{e}_\lambda\right|^2 d\Omega \tag{10}$$

Выбирая ось сферической системы координат в направлении импульса фотона $\vec{k}$ и учитывая, что вектор поляризации $\vec{e}_\lambda$ ортогонален $\vec{k}$, имеем

$$\dot{W}_d = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\left|\vec{d}_{nk}\right|^2\sin^2\theta\, d\cos\theta\, d\varphi \tag{11}$$

Интегрируя по телесному углу и суммируя по поляризациям, получаем для полной скорости спонтанного излучения выражение

$$\dot{W}_d = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\left|\vec{d}_{nk}\right|^2. \tag{12}$$

Для атомов в нижних состояниях типичный матричный элемент дипольного момента $d_{nk} \sim ea_0$. Формулу (12) удобно переписать в скейлинговом виде

$$\dot{W}_d \sim \alpha^3\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^3\left(\frac{d_{nk}}{ea_0}\right)^2\omega_a. \tag{13}$$

В стандартном случае $\dot{W}_d \approx 1.26\cdot 10^6$ с$^{-1}$.

☆ Оценить скорости спонтанных радиационных переходов между колебательными и вращательными состояниями двухатомной молекулы.

◆ Рассмотрим спонтанное излучение высоковозбужденных (ридберговских) состояний атомов. Если $l \approx n$ ("круговые орбиты"), то из-за дипольного правила отбора $l \to l \pm 1$ разрешены переходы $n \to n-1$. Для них

$$d \sim e a_0 n^2, \quad \omega \sim \omega_a n^{-3} \tag{14}$$

и $\dot{W}_{E1} \sim n^{-5} \dot{W}_{E1_a}$. Для освоенной экспериментально области $n \sim 60$ получаем $\dot{W}_{E1} \sim 20\ \text{с}^{-1}$. Если $l \approx 1$ ("линейные орбиты"), то разрешены переходы с большими изменениями n. Поскольку частоты таких переходов могут приближаться к атомным, встает вопрос о выделении основного канала радиационного перехода. Оценим матричный элемент перехода из состояния $|np\rangle$ в основное состояние $|1s\rangle$ при $n >> 1$. Последнее условие позволяет воспользоваться ВКБ-приближением. ВФ имеет основные максимумы вблизи классических точек поворота, которые определяются уравнением (в атомных единицах)

$$\frac{l^2}{2r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2n^2} = 0 \tag{15}$$

Основной вклад в матричный элемент дает область $r \le 1$, где значение n не влияет на вид ВФ, а только на ее нормировку. Нормировочный коэффициент для ВФ ВКБ-приближения может быть выражен через спектр [ЕК76, с. 140]:

$$A_n^2 \approx \frac{2m}{\pi\hbar} \cdot \frac{dE_n}{dn} \tag{16}$$

Для ридберговских атомов $A_n^2 \approx n^{-3}$, $d \sim A_n \sim n^{-3/2}$. Полагая $\omega \sim \omega_a$, получаем $\dot{W}_{E1} \sim n^{-3} \dot{W}_{E1_a}$. Таким образом, для ридберговских атомов в состояниях "линейных орбит" наиболее вероятны радиационные переходы в состояния, близкие к основному. Скорость таких переходов все еще очень мала по сравнению со стандартным значением: при $n \sim 60$ получаем $\dot{W}_{E1} \sim 7 \cdot 10^4\ \text{с}^{-1}$.

🕮 [ЕК76] - Елютин П.В., Кривченков В.Д. - Квантовая механика (с задачами) - М.: Наука, 1976. - 336 с.

§ 24.3 Скорости спонтанных переходов при излучении высших мультипольностей (M1, E2)

◆ Выражение для скорости спонтанных переходов содержит $\hbar$ в знаменателе и является существенно квантовым. Выражение для средней мощности дипольного излучения

$$P = \hbar\omega\dot{W}_{E1} = \frac{4\omega^4}{3c^3}\left|\vec{d}_{nk}\right|^2 \qquad (17)$$

содержит только величины, имеющие классические аналоги. При использовании принципа соответствия ($\vec{d}_{nk} \sim \vec{d}$) формула для средней мощности совпадает с классической (с точностью до числового коэффициента). Поэтому для оценок скоростей переходов, сопровождаемых излучением других типов, можно исходить из классического выражения для мощности [ЛЛII, §71]

$$P = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{m}}^2. \qquad (18)$$

Определение скорости квантовых переходов делением классических выражений для мощности на $\hbar\omega$ дает достаточно точные оценки.

◆ Как всегда, высшие члены разложений особенно интересны в отсутствие низших. Излучение определенных типов может быть запрещено правилами отбора. Начнем с классических правил отбора:

① Если система состоит из частиц с одинаковым отношением заряда к массе, $e/m = \mathrm{const}$, то она не может испускать излучение ни дипольного (E1), ни магнитно-дипольного (M1) типов [ЛЛII, §67,71].

В квантовой теории условие $e/m = \mathrm{const}$ практически означает тождественность частиц. В этом случае принцип Паули накладывает ограничения на квантовые числа системы. Например, для двух бозонов значение полного момента системы L должно быть четным, а для двух фермионов четность L должна совпадать с четностью полного спина S. Если изменения спина невозможны, то правила отбора квантовой теории запрещают переходы с $\Delta L = \pm 1$ и воспроизводят классическое правило отбора.

② Для любой (классической) системы, состоящей из двух частиц, магнитно-дипольное (M1) излучение невозможно. [ЛЛII, §71].

Поэтому в одночастичных моделях квантовых систем обычно рассматривают излучение M1, связанное с переворотом спина [ЛЛIV, §50].

◆ Оператор магнитно-дипольного взаимодействия имеет вид $\hat{V}_m = -\hat{\vec{m}}\hat{\vec{H}}$. Используя выражение $\hat{\vec{H}} = \mathrm{rot}\hat{\vec{A}}$ и учитывая ортогональность векторов $\vec{k}, \vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, в силу которой $\vec{k} \times \vec{e}_1 = \pm k\vec{e}_2$, для квадрата модуля матричного элемента перехода получаем

$$\left|V_{nk}^{+}\right|^2 = 2\pi\hbar\omega m\left|\vec{m}_{nk}\vec{e}_\lambda\right|^2 \qquad (19)$$

Полная скорость перехода при магнитно-дипольном излучении равна

$$\dot{W}_m = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\left|\vec{m}_{nk}\right|^2. \qquad (20)$$

Типичный матричный элемент магнитного момента $m_{nk} \sim \alpha d_{nk}$, поэтому типичная скорость $M1$-переходов оказывается в α^2 раз меньшей скорости $E1$ переходов с той же частотой излученного фотона:

$$\dot{W}_m \sim \alpha^5 \left(\frac{\omega}{\omega_a} \right)^3 \left(\frac{m}{\mu_0} \right)^2 \omega_a . \qquad (21)$$

★ Оценим скорость $M1$-перехода с переворотом спина электрона в магнитном поле Земли ($\mathcal{H} \approx 0.5\ \text{Гс}$). Частота перехода $\omega = 2\mu_0 \mathcal{H}\hbar^{-1} = 8.8 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1}$, и скорость перехода $\dot{W}_m$ оказывается ничтожно малой: $\dot{W}_m \sim 8.4 \cdot 10^{-24}\ \text{с}^{-1}$. Однако в принципе важно, что за счет радиационных переходов спины (невзаимодействующих) электронов во внешнем магнитном поле стремятся принять одно направление. Это явление *радиационной поляризации* электронов наблюдается при движении релятивистских электронов в сильных магнитных полях [ЛЛIV, §90].

★ Оценим скорость $M1$-перехода между подуровнями сверхтонкой структуры основного состояния в атоме водорода. За счет взаимодействия спиновых магнитных моментов протона и электрона энергии состояний с $F = 0$ и $F = 1$ различаются на величину $\hbar\omega_{hf}$, где $\omega_{hf} = \frac{8}{3}\alpha^2\zeta\gamma\omega_a$, ζ есть отношение масс протона и электрона, а $\gamma = 2.793$ - отношение магнитного момента протона к ядерному магнетону. По скейлинговой формуле (21) получаем

$$\dot{W}_m \sim 20\gamma^3\alpha^{11}\zeta^3\omega_a \approx 9 \cdot 10^{-15}\ \text{с}^{-1}. \qquad (22)$$

Несмотря на малость этой величины, соответствующее излучение с длиной волны $\lambda = 21\text{см}$ легко регистрируется от больших масс межзвездного водорода.

◆ Квадрупольное ($E2$) излучение контролируется правилами отбора $\Delta l = 0, \pm 2$, $|\Delta m| \le 2$, $\Delta S = 0$. На основании (18) приходим к скейлинговой оценке скорости перехода с квадрупольным излучением:

$$\dot{W}_q \sim \alpha^5 \left(\frac{\omega}{\omega_a} \right)^5 \left(\frac{D}{e a_0^2} \right)^2 \omega_a . \qquad (23)$$

В одноэлектронных системах (атом водорода, щелочные атомы) наряду с $E2$-каналом радиационного перехода, как правило, открыты и каналы более быстрого $E1$ -излучения. Ситуация меняется в многоэлектронных атомах, где переходы между термами одной конфигурации для дипольного излучения запрещены (правилом отбора $\Delta\Sigma l_i = \pm 1$).

★ Оценим скорость $E2$-перехода между термами $^1S_0$ и $^1D_2$ атома кислорода (конфигурация p^4). Разность энергий между этими термами $\Delta E = 2.21\text{эВ}$, и из скейлинговой формулы (23) получаем оценку скорости перехода $\dot{W}_q \sim 3\,\text{с}^{-1}$. Экспериментальное значение $\dot{W}_q = 1.4\,\text{с}^{-1}$.

EOL ☯