ЛЕКЦИЯ #23
КВАНТОВАННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ - 2
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ

§ 23.1 Состояния моды квантованного электромагнитного поля

◆ При классическом описании поля мы в большинстве случаев рассматривали взаимодействие атомной системы с электрическим полем вида

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi\right), \tag{1}$$

то есть с одной модой классического поля. Рассмотрим теперь состояния одной моды квантового поля (индекс λ буем опускать). Одной из целей будет установление соответствия между свойствами состояний квантовой и классической моделей, и в первую очередь нас будут интересовать свойства оператора электрического поля.

◆ Наиболее важными состояниями квантовой системы являются ее стационарные состояния. Для моды поля, которая описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

спектр собственных значений дискретен: $E_n = \hbar\omega\left(n + 1/2\right)$. Стационарное состояние $|n\rangle$ с энергией E_n можно интерпретировать как состояние, в котором присутствует n фотонов с энергией $\hbar\omega$. Матричные элементы операторов рождения и уничтожения между стационарными состояниями даются соотношениями

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \qquad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle. \tag{3}$$

◆ Рассмотрим уравнения движения для операторов рождения и уничтожения одной моды поля. В гейзенберговском представлении (см. §13.1)

$$i\hbar\dot{\hat{a}}^+ = \left[\hat{a}^+, \hat{H}\right] = -\hbar\omega\hat{a}^+ \tag{4}$$

откуда

$$\hat{a}^+(t) = \hat{a}_0^+ \exp(i\omega t) \tag{5}$$

Аналогично для оператора уничтожения

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_0 \exp(-i\omega t) \tag{6}$$

Здесь $\hat{a}_0^+$ и $\hat{a}_0$ - не зависящие от времени (шредингеровские) операторы. Используя выражение для оператора векторного потенциала

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r},t)=\sum_{\lambda}\left[\hat{a}_{\lambda}\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})+\hat{a}_{\lambda}^{+}\vec{A}_{\lambda}^{*}(\vec{r})\right] \tag{7}$$

где

$$\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})=\frac{u}{\sqrt{\omega_{\lambda}}}\vec{e}_{\lambda}\exp i\vec{k}_{\lambda}\vec{r}, \qquad u=\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^{2}}{L^{3}}} \tag{8}$$

и определение

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{9}$$

для оператора электрического поля $\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)$ имеем выражение

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)=i\frac{\sqrt{\omega}}{c}u\vec{e}\left[\hat{a}_{0}e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}-\hat{a}_{0}^{+}e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right]. \tag{10}$$

Во многих задачах квантовой радиофизики пространственной зависимостью поля можно пренебречь, положив $\vec{k}\vec{r}=0$ (см. §2.1) и ограничиться рассмотрением только временной зависимости. Положим

$$\hat{\vec{E}}=\left(\frac{\sqrt{2\omega}}{c}u\vec{e}\right)\hat{\varepsilon}=\vec{\mathsf{E}}_{0}\hat{\varepsilon} \tag{11}$$

где $\vec{\mathsf{E}}_{0}$ - числовой фактор, задающий масштаб поля, а $\hat{\varepsilon}$ - безразмерный оператор электрического поля, равный оператору импульса полевого осциллятора:

$$\hat{\varepsilon}=-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^{+}\right). \tag{12}$$

◆ Распределение вероятностей $W_n(\varepsilon)$ значений амплитуды безразмерного электрического поля ε в стационарном состоянии $|n\rangle$ дается квадратом собственной функции $\psi_n(\varepsilon)$ стационарных состояний гармонического осциллятора,

$$W_n(\varepsilon)=\psi_n^2(\varepsilon). \tag{13}$$

Отметим в частности, что среднее значение напряженности поля $\langle\varepsilon\rangle=0$ равно нулю. При $n>>1$ сглаженное по быстрым осцилляциям распределение $W_n(\varepsilon)$ стремится к пределу

$$W_n(\varepsilon)\approx\frac{1}{\pi\sqrt{2n-\varepsilon^2}}. \tag{14}$$

Такую же форму имеет распределение значений классического поля (1) в заданной точке пространства во взятые случайным образом моменты времени (или со случайной фазой φ).

§ 23.2 Фаза квантованного поля

★ Проблема фазы в квантовой теории вытекает из трудностей, присущих определению фазы в классической теории. Если использовать определение типа "фаза гармонического колебания $\varphi(t)$ есть аргумент косинуса в выражении $A\cos(\omega t+\varphi_0)$", то φ оказывается не динамической переменной, а временем, измеренным в заданных единицах. Если использовать определение типа "фаза гармонического колебания есть $\varphi(t)=\operatorname{arctg}(-\dot{x}/\omega x)$", то измерение фазы требует одновременного измерения координаты и скорости частицы, в квантовой механике невозможного. Наконец, если использовать определение типа "фаза есть обобщенная координата, канонически сопряженная переменной действия

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint pdq\text{"}$$

то сложности вытекают из того, что I задается не как функция от динамических переменных, а как функционал, зависящий от состояний системы на протяжении периода движения.

◆ Рассмотрим фазовые свойства электромагнитного поля. Стандартным *de facto* способом введения фазовых переменных в квантовую теорию гармонического осциллятора является предложенный Каррутерсом и Ньето [CN68] подход, использующий фазовые операторы $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Phi}^+$, определенные соотношениями

$$\hat{\Phi}=\frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}\hat{a},\quad \hat{\Phi}^+=\hat{a}^+\frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}. \tag{15}$$

⚭ [CN68] - Carruthers P., Nieto M. - Rev. Mod. Phys., 1968, <u>40</u>, 2, 411.

Легко проверяются равенства:

$$\hat{\Phi}\hat{\Phi}^+=\hat{1},\qquad \hat{\Phi}^+\hat{\Phi}=\hat{1}-|0\rangle\langle 0|. \tag{16}$$

Поскольку эрмитовски сопряженные фазовые операторы не коммутируют, то **не существует** эрмитова оператора фазы $\hat{\varphi}$ такого, что

$$\hat{\Phi}=\exp(i\hat{\varphi}),\ \ \hat{\Phi}^+=\exp(-i\hat{\varphi}) \tag{17}$$

Однако с помощью фазовых операторов можно ввести эрмитовы операторы косинуса фазы

$$\hat{\cos}\varphi=\frac{1}{2}\left(\hat{\Phi}+\hat{\Phi}^+\right) \tag{18}$$

и синуса фазы

$$\hat{\sin}\varphi=\frac{1}{2i}\left(\hat{\Phi}-\hat{\Phi}^+\right) \tag{19}$$

Эти операторы не коммутируют, а потому не являются одновременно измеримыми величинами.

☆ Найти вид функций распределения $W(\cos\varphi)$ и $W(\sin\varphi)$ в стационарном состоянии $|n\rangle$.

☆ Исследовать собственные векторы операторов $\hat{\cos}\varphi$ и $\hat{\sin}\varphi$.

Корреляционная функция оператора косинуса фазы в стационарном состоянии имеет вид

$$B_c(\tau) = \langle n | \hat{\cos}\varphi(t)\,\hat{\cos}\varphi(t+\tau) | n \rangle = \frac{1}{2}\cos\omega\tau \qquad (20)$$

Такое же выражение получается для корреляционной функции косинуса фазы классического осциллятора с неопределенной (но сохраняющейся) фазой (см. НЛД, L02). Таким образом, классическим аналогом стационарного состояния $|n\rangle$ моды электромагнитного поля является монохроматическая волна с амплитудой $\vec{E}_0 = \mathsf{E}_0\sqrt{2n}$ и постоянной, но полностью неопределенной фазой φ. Степень сходства этих состояний увеличивается с ростом n.

★ Позже будут рассмотрены более близкие к классическим квантовые состояния одной моды электромагнитного поля.

◆ Практическое приготовление поля в состоянии с определенным числом фотонов представляет весьма нетривиальную экспериментальную задачу (см. [К80, §6.4]). Одним из источников трудностей является то, что в отличие от ангармонических систем с неэквидистантным спектром (см. §11.2) гармонический осциллятор невозможно перевести из одного стационарного состояния в другое с помощью классической силы (см. §13.2). Однако часто скорости и сечения переходов в электромагнитном поле зависят только от **среднего** числа фотонов в моде $\langle n_\lambda \rangle$. В таких задачах обычно считают начальное состояние поля стационарным с $n_\lambda = \langle n_\lambda \rangle$.

🕮 [К80] - Клышко Д.Н. - Фотоны и нелинейная оптика. - М.: Наука, 1980. - 256 с.

§ 23.3 Оператор взаимодействия

◆ В §2.1 был построен одночастичный гамильтониан системы, взаимодействующей со внешним электромагнитным полем, заданным векторным потенциалом $\vec{A}(\vec{r},t)$. Этот гамильтониан имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, где $\hat{H}_0$ есть гамильтониан невозмущенной системы,

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + e\Phi_0(\vec{r}), \qquad (21)$$

а оператор возмущения $\hat{V}(t)$ имеет вид

$$\hat{V}(t) = -\frac{e}{mc}\hat{\vec{p}}\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2(\vec{r},t). \qquad (22)$$

Описывая электромагнитное поле квантовой моделью, мы должны заменить в этом выражении векторный потенциал $\vec{A}$ на построенный в §22.2 оператор $\hat{\vec{A}}$ и добавить к $\hat{H}$ гамильтониан свободного электромагнитного поля

$$\hat{H}_F = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(\hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda + \frac{1}{2} \right). \tag{23}$$

Оператор взаимодействия $\hat{V}(t)$ для квантовой модели поля представляется в виде суммы двух слагаемых $\hat{V}(t) = \hat{V}_1(t) + \hat{V}_2(t)$, где $\hat{V}_1$ - линеен, а $\hat{V}_2$ квадратичен по операторам рождения и уничтожения фотонов:

$$\hat{V}_1(t) = -\frac{eu}{mc} \hat{\vec{p}} \sum_\lambda \frac{\vec{e}_\lambda}{\sqrt{\omega_\lambda}} \left[\hat{a}_\lambda e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + \hat{a}_\lambda^+ e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} \right] \tag{24}$$

$$\hat{V}_2(t) = \frac{e^2u^2}{2mc^2} \left\{ \sum_\lambda \frac{\vec{e}_\lambda}{\sqrt{\omega_\lambda}} \left[\hat{a}_\lambda e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} + \hat{a}_\lambda^+ e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)} \right] \right\}^2 \tag{25}$$

Входящий в эти выражения одинаковый для всех мод поля множитель u есть

$$u = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}} \tag{26}$$

☆ Построенный гамильтониан описывает изолированную систему "электрон в статическом потенциале + поперечное электромагнитное поле + их взаимодействие". Такая система автономна. Почему в гамильтониане присутствуют зависящие от времени члены?

☆ Оператор $\hat{V}$ описывает взаимодействие двух частиц - электрона и фотона. В нем присутствуют операторы $\hat{\vec{p}}$ и $\exp(i\vec{k}\vec{r})$, действующие на ВФ **электрона**. Где операторы, действующие на ВФ фотона?

§ 23.4 Число фотонов в моде

◆ Свободное электромагнитное поле (размер куба периодичности $L \to \infty$) обладает непрерывным энергетическим спектром. Поэтому все переходы, вызванные взаимодействием с таким полем, могут быть описаны выражением для скорости переходов в состояния непрерывного спектра - золотым правилом Ферми (§3.1).

$$\dot{W}_{nk} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \widetilde{V}_{nk}^{(m)} \right|^2 \rho(E_k) \tag{27}$$

Здесь $\widetilde{V}_{nk}^{(m)}$ составной (в общем случае) матричный элемент m-го порядка теории возмущений (см. §10.1), а $\rho(E_k)$ есть плотность конечных состояний. Последняя зависит от числа и типа частиц в конечных состояниях непрерывного спектра. Для подсчета (сглаженной энергетической) плотности конечных состояний обычно применяется квазиклассическая оценка:

$$\rho(E) = \frac{d\overline{\mathcal{N}}(E)}{dE}, \tag{28}$$

где $\overline{\mathcal{N}}(E)$ - сглаженное число состояний с энергией, меньшей E - дается формулой Вейля,

$$\overline{\mathcal{N}}(E) = \frac{\Omega(E)}{(2\pi\hbar)^d}, \tag{29}$$

в которой $\Omega(E)$ есть величина фазового объема, занятого классическими состояниями с энергией, не превосходящей E, а d есть число степеней свободы.

★ Если в конечном состоянии в кубе с ребром L имеется один фотон с энергией $E = \hbar\omega$ с направлением волнового вектора в телесном угле $\Delta\Omega$, то

$$\Omega(E) = L^3 \frac{E^3}{(2\pi\hbar)^3}\Delta\Omega \quad \text{и} \quad \rho(E) = L^3 \frac{\omega^2}{\hbar(2\pi c)^3}\Delta\Omega \tag{30}$$

◆ Рассмотрим первый порядок теории возмущений, когда $\widetilde{V}_{nk}^{(m)}$ есть V_{nk} - матричный элемент оператора взаимодействия. Матричные элементы оператора $\hat{V}_1$ отличны от нуля только между состояниями поля, в которых число фотонов в моде λ отличается на единицу. Для $\hat{V}_2$ отличны от нуля матричные элементы между состояниями поля, в которых или числа фотоны в двух модах λ_1 и λ_2 отличаются на единицу, или в одной моде отличаются на две единицы, или одинаковы. Таким образом, операторы $\hat{V}_1$ и $\hat{V}_2$ описывают различные типы переходов и могут рассматриваться по отдельности.

Рассмотрим оператор $\hat{V}_1$. Скорости процессов, сопровождающихся поглощением ($\dot{W}_\lambda$) и испусканием ($\dot{W}_\lambda^+$) фотонов моды λ пропорциональны квадратам матричных элементов операторов $\hat{a}_\lambda$ и $\hat{a}_\lambda^+$. Поэтому

$$\dot{W}_\lambda = \dot{W}_0 n_\lambda, \quad \dot{W}_\lambda^+ = \dot{W}_0(n_\lambda + 1). \tag{31}$$

Таким образом, переходы с испусканием фотона более вероятны, чем с его поглощением.

В точке пространства, где присутствует излучение с интенсивностью (плотностью потока энергии) I, плотность энергии электромагнитного поля есть $W = I/c$. Разделив это выражение на число мод поля в единице объема, отвечающих спектральному интервалу $\Delta\omega$ и интервалу телесных углов распространения $\Delta\Omega$ (см. (30)),

$$N = \frac{\omega^2}{(2\pi c)^3} \Delta\omega\Delta\Omega \tag{32}$$

и на энергию кванта $\hbar\omega$, получаем выражение для числа фотонов в моде

$$n_\lambda = \frac{W}{N\hbar\omega} = \frac{(2\pi c)^3}{\hbar\omega^3} \cdot \frac{I}{\Delta\omega\Delta\Omega} \tag{33}$$

Таким образом, входящее в выражения (31) число фотонов в моде n_λ связано со *спектральной яркостью* поля $B(\omega,\Omega)$ - плотностью потока энергии в единицу спектрального интервала и в единицу телесного угла - соотношением

$$n(\vec{k}) = \frac{\lambda^3}{\hbar c} B(\omega,\Omega), \tag{34}$$

где λ есть длина волны фотона данной моды.

★ Оценим максимальное число фотонов в моде для стандартного лазера. Ширина спектральной полосы излучения $\Delta\omega$ определяется конечной длительностью импульса лазера: $\Delta\omega \sim \tau^{-1} \sim 10^8$ с$^{-1}$. Считая, что пучок имеет радиус $a = 0.1$см и обладает дифракционной расходимостью $\theta \approx \lambda/a \approx 10^{-3}$, имеем для телесного угла оценку $\Delta\Omega \sim 2.5 \cdot 10^{-7}$. Спектральная яркость есть $B \sim 4 \cdot 10^{13}$, а коэффициент $\lambda^3/\hbar c$ для стандартного лазера равен $3.6 \cdot 10^4$. В итоге $\max n_\lambda \approx 1.4 \cdot 10^{18}$.

★ Оценим число видимых $(\omega = 2\omega_s = 3.5 \cdot 10^{15}\text{ с}^{-1})$ фотонов в моде солнечного света. Интенсивность солнечного света $I_s = 0.14$ Вт см$^{-2}$. Ширину спектра оценим величиной $\Delta\omega = 4\omega_s = 7 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ (частота мягкого УФ кванта). Телесный угол, под которым видно Солнце, $\Delta\Omega \sim 4 \cdot 10^{-6}$. Спектральная яркость есть $B \sim 5 \cdot 10^{-5}$, а коэффициент $\lambda^3/\hbar c$ равен $4.5 \cdot 10^3$. В итоге $\max n_\lambda \approx 0.2$. Эта оценка завышена примерно на порядок по сравнению с вытекающей из формулы Планка.

☆ Выше на основе астрономических данных было оценено число фотонов в моде солнечного света у поверхности Земли $(n_\lambda \approx 0.02)$. Расстояние от Солнца до Сатурна примерно в 10 раз больше, чем до Земли. Чему равно число фотонов в моде солнечного света у поверхности Сатурна?

EOL ☯