ЛЕКЦИЯ #22
КВАНТОВАННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 22.1 Взаимодействие с квантованным электромагнитным полем: перспективы подхода

◆ Целесообразность перехода к классу моделей, в которых электромагнитное поле описывается как квантовая система (тип 8 по классификации, данной в §1.2), определяется рядом недостатков ранее использованных предположений, а также соображениями полноты и последовательности.

В стандартной полуклассической схеме, рассматривавшей как действующее поле F_1, так и рассеянное поле F_2 как классические, а систему S как квантовую, присутствовал постулат о сшивке двух теорий: средний дипольный момент квантовой системы $<\hat{\vec{d}}(t)>$ рассматривался как классический источник заданного поля. Этот постулат не принадлежит ни классической, ни квантовой теориям и может стать источником трудностей.

Далее: для некоторых задач в полуклассических моделях мы получили результаты, не соответствующие ни классической теории, ни даже эксперименту - например, нам не удалось описать рассеяние света на свободном электроне (см. §18.3).

Далее: квантованное электромагнитное поле представляет собой почти всегда присутствующий термостат E - систему с бесконечным числом степеней свободы, связанную с атомной системой S и обеспечивающую отток из нее энергии. Спонтанное излучение мы описали феноменологически с помощью констант релаксации (§16.3). Однако в присутствии внешнего поля характер спонтанного излучения может измениться (см. начало §17.3) - и нам нужны более последовательные методы его описания.

Далее, в полуклассическом формализме мы часто считали, что частота излучения ω равна частоте перехода квантовой системы ω_{nk}. Тем самым полю навязывались частоты движения системы. В общем случае это может быть и не так. Спектр излучения системы может быть и непрерывным - а до сих пор он всегда получался дискретным (система совершала квазипериодическое движение).

Last not least: исторически первой квантовой моделью была именно модель квантованного свободного электромагнитного поля (M. Planck, 1901), в то время как квантование механических систем было введено позже (A. Einstein, 1906 или N. Bohr, 1913).

§ 22.2 Квантование электромагнитного поля

◆ Напомним схему квантования свободного электромагнитного поля. Она состоит из трех этапов: разложения классического свободного электромагнитного поля по модам, введения гамильтонова формализма для классического поля [ЛЛII, §52] и квантования полученных гамильтоновых систем.

◆ Из уравнений Максвелла для свободного поля,

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}\vec{E} = 0, \tag{1}$$
$$\mathrm{rot}\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0$$

введением векторного потенциала $\vec{A}$, связанного с напряженностями электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей соотношениями

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} \tag{2}$$

и удовлетворяющего условию кулоновской калибровки $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ для $\vec{A}$ получается волновое уравнение

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{A}^2}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

◆ Удобно считать, что все поле излучения находится в кубе с ребром L и подчинено периодическим граничным условиям на стенках куба. Удовлетворяющее этим условиям частное решение волнового уравнения имеет вид

$$\vec{A}(\vec{r},t) = a_\lambda(t)\vec{A}_\lambda(\vec{r}) \tag{4}$$

где пространственная часть решения $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ определяется формулой

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}) = N_\lambda \vec{e}_\lambda \exp i\,\vec{k}_\lambda \vec{r} \tag{5}$$

Компоненты волнового вектора $\vec{k}_\lambda$ в силу условий периодичности могут принимать только дискретное множество значений

$$k_{\lambda i} = \frac{2\pi}{L} n_{\lambda i} \tag{6}$$

Здесь индекс i нумерует декартовы компоненты. Вектор поляризации $\vec{e}_\lambda$ в силу уравнения Максвелла $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ удовлетворяет условию поперечности $\vec{e}_\lambda \cdot \vec{k}_\lambda = 0$. При заданном $\vec{k}$ достаточно рассматривать решения с двумя различными $\vec{e}_\lambda$: остальные решения могут быть получены как линейные комбинации. Поэтому можно считать $\vec{e}_\lambda$ дискретной переменной, принимающей два значения. Совокупность четырех числе $n_{\lambda 1}$, $n_{\lambda 2}$, $n_{\lambda 3}$, $\vec{e}_\lambda$ которую мы обозначим одним символом λ, однозначно определяет вид пространственной части решения: ее принято называть *модой поля*.

◆ Общее решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_{\lambda}\left[a_{\lambda}(t)\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})+a_{\lambda}^{*}(t)\vec{A}_{\lambda}^{*}(\vec{r})\right] \tag{7}$$

Используя известное из классической электродинамики выражение для плотности энергии поля

$$W=\frac{1}{8\pi}\left[\vec{E}^{2}+\vec{H}^{2}\right] \tag{8}$$

и соотношение ($\vec{A}$), для энергии поля (в кубе с ребром L) имеем

$$E=\sum_{\lambda}E_{\lambda} \qquad E_{\lambda}=\frac{N_{\lambda}^{2}L^{3}\omega_{\lambda}^{2}}{4\pi c^{2}}\left[a_{\lambda}a_{\lambda}^{*}+a_{\lambda}^{*}a_{\lambda}\right] \tag{9}$$

Введем переменные

$$Q_{\lambda}=\left(a_{\lambda}+a_{\lambda}^{*}\right)\sqrt{\frac{N_{\lambda}^{2}L^{3}}{4\pi c^{2}}}, \qquad P_{\lambda}=-i\omega_{\lambda}\left(a_{\lambda}-a_{\lambda}^{*}\right)\sqrt{\frac{N_{\lambda}^{2}L^{3}}{4\pi c^{2}}} \tag{10}$$

В этих переменных энергия одной моды принимает вид

$$E_{\lambda}=\frac{1}{2}P_{\lambda}^{2}+\frac{1}{2}\omega_{\lambda}^{2}Q_{\lambda}^{2} \tag{11}$$

Это выражение можно рассматривать как классическую функцию Гамильтона H_{λ} для одной моды в канонических переменных P_{λ},Q_{λ}. Уравнения Гамильтона для одной моды совпадают с уравнениями Гамильтона для гармонического осциллятора единичной массы.

◆ Квантование поля сводится к замене классических переменных P_{λ} и Q_{λ} на квантовые операторы $\hat{P}_{\lambda}$ и $\hat{Q}_{\lambda}$ с перестановочными соотношениями $\left[\hat{P}_{\lambda},\hat{Q}_{\lambda}\right]=-i\hbar$. Удобнее иметь дело с операторами рождения и уничтожения для осциллятора поля, которые определяются соотношениями

$$\hat{a}_{\lambda}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{Q}_{\lambda}\sqrt{\omega_{\lambda}}-i\hat{P}_{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\lambda}}}\right), \qquad \hat{a}_{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{Q}_{\lambda}\sqrt{\omega_{\lambda}}+i\hat{P}_{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\lambda}}}\right), \tag{12}$$

и имеют перестановочные соотношения $\left[\hat{a}_{\lambda},\hat{a}_{\lambda}^{+}\right]=1$. Гамильтониан моды поля выражается через эти операторы так:

$$H_{\lambda}=\frac{\hbar\omega_{\lambda}}{2}\left(\hat{a}_{\lambda}\hat{a}_{\lambda}^{+}+\hat{a}_{\lambda}^{+}\hat{a}_{\lambda}\right). \tag{13}$$

Он совпадает с гамильтонианом гармонического осциллятора: поэтому моды электромагнитного поля называются *осцилляторами поля*. Из равенства коэффициентов перед скобками в (9) и (13) определяется вид нормированных мод поля:

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}) = \frac{u}{\sqrt{\omega_\lambda}}\vec{e}_\lambda \exp i\vec{k}_\lambda\vec{r}, \qquad u = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}}. \tag{14}$$

Величина u одинакова для всех мод. Оператор векторного потенциала принимает вид

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \left[\hat{a}_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}) + \hat{a}_\lambda^+ \vec{A}_\lambda^*(\vec{r})\right]. \tag{15}$$

Операторы напряженностей электрического ($\hat{\vec{E}}$) и магнитного ($\hat{\vec{H}}$) полей выражаются через $\hat{\vec{A}}(\vec{r},t)$ с помощью уравнений (2).

§ 22.3 Вакуум электромагнитного поля

◆ Основное состояние электромагнитного поля, при котором все осцилляторы поля находятся в основных состояниях, называется *вакуумом поля*, или просто вакуумом. В квантовой модели вакуум обладает бесконечно большой энергией. Учитывая, что модель "поля в замкнутом объеме" применима также к описанию электромагнитных полей в резонаторах, можно оценить величину эффектов, связанных с изменением энергии вакуума поля в резонаторе при изменении объема резонатора. Результаты таких расчетов находятся в вопиющем противоречии с наблюдениями.

◆ Наивные расчеты страдают методическим пороком: они учитывают изменение энергии вакуума в резонаторе, но не учитывают изменение энергии поля в объеме, занятом резонатором, в отсутствие резонатора. Более корректный расчет проведем для простейшей одномерной модели - скалярного поля, ограниченного резонатором длины L (точками на прямой). Частоты мод резонатора

$$\omega_n = c\frac{\pi}{L}n \tag{16}$$

что приводит к энергии вакуума в резонаторе

$$E_{VR} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\hbar c\frac{\pi}{L}n = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n \tag{17}$$

В вакууме без резонатора частотный спектр мод поля непрерывный, со спектральной плотностью состояний

$$\rho(\omega) = \frac{L}{\pi c} \tag{18}$$

что приводит к значению энергии в мысленно выделенном объеме резонатора

$$E_{VF} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\int_0^\infty n\,dn \tag{19}$$

Таким образом, изменение энергии вакуума, связанное с присутствием резонатора, дается выражением

$$E_C = E_{VR} - E_{VF} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n - \int_0^{\infty} n\,dn\right], \tag{20}$$

которое представляет разность двух бесконечных величин. Для вычисления этой разности воспользуемся трюком: введем экспоненциальное уменьшение энергии с ростом n, а затем устремим его к нулю. Произведем в сумме и под интегралом замену $n \to ne^{-\alpha n}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \to \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\alpha n} = \frac{e^{\alpha}}{\left(e^{\alpha}-1\right)^2} \tag{21}$$

и

$$\int_0^{\infty} n\,dn \to \int_0^{\infty} ne^{-\alpha n}\,dn = \frac{1}{\alpha^2} \tag{22}$$

Разность этих величин при малых α есть $\Delta = -\frac{1}{12} + O(\alpha)$, откуда

$$E_C = -\frac{\hbar\omega_0}{24} = -\frac{\pi}{24}\cdot\frac{\hbar c}{L} \tag{23}$$

Таким образом, в нашей модели наличие граничных условий на поле ведет к появлению силы, стремящейся сблизить "стенки" резонатора - чем меньше L, тем меньше энергия системы.

★ Проделанный расчет носит переупрощенный характер, но схема вычислений остается в силе и для более реалистических моделей векторных полей в трехмерном пространстве. Изменение энергии вакуума между двумя параллельными неограниченными плоскими пластинами составляет (на единицу поверхности) $E_C^* = -1.37\cdot 10^{-2}\hbar c L^{-3}$, а внутри кубического резонатора с ребром L изменение энергии $E_C = +9.52\cdot 10^{-2}\hbar c L^{-1}$.

Явление взаимодействия между телами, вызванного изменением в их присутствии энергии вакуума электромагнитного поля, называется *эффектом Казимира* (Casimir H.B.G., 1948). Подробнее см. [MT88].

[MT88] - Мостепаненко В.М., Трунов Н.Н. - УФН, 1988, 156, 3, 385-426.

◆ Отправным пунктом построения схемы квантования электромагнитного поля являлось использование выражения

$$W = \frac{1}{8\pi}\left[\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right] \tag{24}$$

для плотности энергии свободного (от зарядов) электромагнитного поля. Это выражение было введено Максвеллом (1855) как способ описания энергии взаимодействия зарядов.

☆ Энергия электростатического поля

$$E = \frac{1}{8\pi}\int \vec{E}^2(\vec{r})d\vec{r} \qquad (25)$$

системы двух точечных зарядов e_1 и e_2, покоящихся в вакууме на расстоянии r_{12} друг от друга, бесконечна. Показать, что за вычетом из E бесконечных вкладов от энергии собственного электростатического поля каждого из зарядов остаток E' равен энергии кулоновского взаимодействия зарядов: $E' = e_1 e_2 / r_{12}$.

Соответственно взаимодействие, созданное эффектом Казимира, может быть интерпретировано как взаимодействие между частицами вещества, составляющими стенки резонатора. Это взаимодействие является притягивающим; его потенциал убывает как седьмая степень расстояния между частицами:

$$U_C(r) \sim r^{-7} \qquad (26)$$

(см. [ЛЛIV, §85]).

EOL ☯