ЛЕКЦИЯ #21
СИЛЬНОЕ ПОЛЕ - 4

§ 21.1 Сечения переходов

◆ Постановка задачи: на основе квантовой теории, рассматривая взаимодействие электронов с ионами как возмущение, вычислить скорость изменения энергии системы электронов, находящихся в окружении неподвижных ионов, в присутствии сильного электромагнитного поля. ВФ невозмущенных электронов возьмем из §18.3:

$$\Psi_p(\vec{r},t) = \mathcal{N} \exp i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar} \cdot \varphi(t), \tag{1}$$

$$\varphi(t) = \exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m}t - \frac{e\vec{p}\vec{E}}{m\omega^2}\cos\omega t + \frac{e^2\vec{E}^2}{4m\omega^2}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\right]. \tag{2}$$

Определим скорость изменения амплитуд квазиэнергетических состояний за счет рассеяния на кулоновском потенциале. Уравнение для амплитуд в первом порядке теории возмущений можно записать в виде

$$i\hbar\frac{\partial a(\vec{p}_2)}{\partial t} = \left\langle \Psi_{\vec{p}_1} \middle| U(\vec{r}) \middle| \Psi_{\vec{p}_2} \right\rangle = A(\vec{q})M(t) \tag{3}$$

Пространственная часть матричного элемента перехода универсальна и не зависит от поля:

$$A(\vec{q}) = \int U(\vec{r})\exp\left(-i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}\right)d\vec{r}, \tag{4}$$

где $\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ есть изменение импульса электрона при рассеянии. Величина $A(\vec{q})$ с точностью до константы есть амплитуда рассеяния в борновском приближении. Временная часть матричного элемента дается формулой

$$M(t) = \exp\frac{i}{\hbar}\left\{\varepsilon t - \frac{e(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\vec{E}}{m\omega^2}\sin\omega t\right\}, \tag{5}$$

где $\varepsilon = \left(p_2^2 - p_1^2\right)/2m$ есть изменение кинетической энергии электрона при рассеянии. Правая часть уравнения (3) может быть разложена в ряд Фурье:

$$i\hbar\frac{\partial a(\vec{p}_2)}{\partial t} = A(\vec{q})\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\left[\frac{\varepsilon}{\hbar} + n\omega\right]t\right). \tag{6}$$

При вычислении скорости перехода в различные состояния непрерывного спектра вклады дают только переходы, при которых кинетическая энергия электрона изменяется на величину, кратную кванту энергии внешнего поля: $\varepsilon = n\hbar\omega$.

◆ Дальнейшие расчеты повторяют обычную теорию возмущений для переходов в состояния непрерывного спектра (ср. §3.1) - но уже под воздействием "полигармонического" поля:

$$\dot{W} = \frac{2\pi}{\hbar}\int d\vec{p}_2 \left|A(\vec{q})\right|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2 \delta(\varepsilon + n\hbar\omega). \qquad (7)$$

Переходя к сечениям переходов с изменением энергии электрона на $\pm n\hbar\omega$, получаем

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\pm n}}{d\Omega} = \frac{d\sigma(\vec{q})}{d\Omega}\lambda J_n^2\left(\frac{e\vec{E}\vec{q}}{m\hbar\omega^2}\right)} \qquad (8)$$

где $J_n(z)$ есть функция Бесселя первого рода,

$$\lambda = \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{1 \pm n\xi}, \qquad \xi = \frac{2\hbar\omega}{mv^2}. \qquad (9)$$

Формула (8) для сечений переходов с поглощением $(+n)$ или испусканием $(-n)$ нескольких квантов внешнего поля при рассеянии на потенциале в поле гармонической волны называется *формулой Бункина - Федорова* [БФ65].

[БФ65] - Бункин Ф.В., Федоров М.В. - ЖЭТФ, 1965, 49, 1215.

[БКФ72] - Бункин Ф.В., Казаков А.К., Федоров М.В. - УФН, 1972, 107, 4, 559-594.

◆ Формула (8) применима для произвольного вида рассеивающего потенциала $U(\vec{r})$. Все специальные зависимости определяются первым сомножителем - борновским сечением рассеяния. Параметр квантовой теории возмущений равен максимальному аргументу функций Бесселя:

$$\frac{e\mathcal{E}q}{m\hbar\omega^2} = \frac{e\mathcal{E}v}{\hbar\omega^2} = \beta. \qquad (10)$$

В частности, замена функции Бесселя $J_1(z)$ первым членом степенного разложения приводит к результату первого порядка теории возмущений. Формула (8) осуществляет эффективное подсуммирование ряда ТВ, объединяя все процессы с одинаковым **итоговым** числом поглощенных (или испущенных) фотонов.

§ 21.2 Скорость поглощения энергии при ВТЭ

★ **Изменение** энергии электрона при рассеянии на статическом потенциале в присутствии электромагнитной волны называется *вынужденным тормозным эффектом* (stimulated bremsstrahlung), или ВТЭ. Спонтанным тормозным эффектом считается **уменьшение** энергии электрона при рассеянии на статическом потенциале (в отсутствие электромагнитной волны) за счет *тормозного излучения* [ЛЛII, §68].

◆ Пусть ψ - угол между направлением начального импульса электрона и вектором напряженности электрического поля: $\vec{p}_1\vec{E} = p_1\mathcal{E}\cos\psi$. Скорость изменения энергии электрона при ВТЭ определяется *энергетическим сечением*

$$\sigma_\varepsilon(\psi) = \int d\cos\theta d\varphi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\frac{d\sigma^k}{d\Omega}, \tag{11}$$

суммирующим сечения рассеяния на все углы с весом, равным числу поглощенных квантов. Мощность, поглощаемая единицей объема:

$$\mathsf{P} = \left\langle vNn\hbar\omega\sigma_\varepsilon\right\rangle, \tag{12}$$

где угловые скобки означают усреднение с функцией распределения электронов по скоростям. Для кулоновского потенциала сечение рассеяния,

$$\frac{d\sigma(\vec{q})}{d\Omega} = \frac{\left(2m^2Ze^2\right)^2}{q^4}, \tag{13}$$

быстро растет с уменьшением q. Переданный импульс q принимает минимальное значение для рассеяния вперед с поглощением одного кванта:

$$\min q = \sqrt{p^2 + 2\hbar\omega} - p \approx \frac{m\hbar\omega}{p} = \frac{\hbar\omega}{v}. \tag{14}$$

Таким образом, в области рассеяния вперед, где сечение рассеяния максимально, аргумент функций Бесселя,

$$\frac{e\mathcal{E}}{m\hbar\omega^2}\cdot\frac{\hbar\omega}{v} = \frac{e\mathcal{E}v}{\hbar\omega^2}\cdot\frac{\hbar\omega}{mv^2} = 2\beta\xi, \tag{15}$$

оказывается мал при выполнении условия $\beta\xi << 1$, менее жесткого, чем малость параметра ТВ $\beta << 1$. Величина $\beta\xi$ не содержит $\hbar$ и равна отношению амплитуды колебаний скорости электрона к его начальной скорости (ср. §20.3).

◆ Если $\beta\xi << 1$, то для оценки вкладов в энергетическое сечение от процессов с n квантами можно воспользоваться асимптотикой функций Бесселя при малых z:

$$J_n(z) \approx \frac{z^n}{2^n n!}. \tag{16}$$

Для рассеяния на кулоновском потенциале оценка вклада в энергетическое сечение от одноквантовых переходов дает

$$T_1 \sim \frac{1}{q^4} q^2 \Delta q \sim \frac{1}{\xi} >> 1, \tag{17}$$

а от двухквантовых -

$$T_2 \sim \frac{1}{q^4} q^4 \Delta q \sim \xi << 1. \tag{18}$$

Таким образом, если $1 \le \beta << \xi^{-1}$, то в поглощении энергии доминируют одноквантовые процессы, скорость которых пропорциональна интенсивности внешнего поля.

★ Итак, наличие области, где параметр квантовой ТВ велик, но продолжается зависимость $\mathrm{P} \sim I$, специфично для кулоновского потенциала и определено господством рассеяния вперед. Для короткодействующих потенциалов можно ожидать существенных квантовых поправок к классическому выражению - но в этом случае и не ожидается соответствия между классическим и квантовым сечениями процессов.

★ Граница, на которой заканчивается доминирование рассеяния вперед, по внешне чисто случайным причинам не содержит $\hbar$, что составляет одну из теорем соответствия. Действительно, если $2\hbar\omega / mv^2 = \xi << 1$, то в основном происходят незначительные изменения энергии электрона, а это - случай мягких квантов, когда должна быть применима классическая теория.

◆ Если параметр $\beta\xi$ велик, $\mathcal{E} >> \mathcal{E}_c$, то почти всюду можно заменить функцию Бесселя ее асимптотикой для больших значений аргумента:

$$J_n(z) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{19}$$

Зависимость сечений от напряженности поля будет в основном определяться первым множителем:

$$\frac{d\sigma^{\pm n}}{d\Omega} \sim J_n^2 \sim \frac{1}{z} \sim \mathcal{E}^{-1}. \tag{20}$$

Таким образом, энергетическое сечение будет обратно пропорционально величине поля - в согласии с классическим результатом. Итак, исследование асимптотик квантовой формулы (8) приводит к тем же законам зависимости поглощения от интенсивности, что и классическая теория.

★ Асимптотика $J_n(z)$, заданная формулой (19), применима, если $z >> n$. В области $z << n$ функции Бесселя высших индексов весьма малы. Таким образом, при заданной величине β при ВТЭ эффективны процессы с числом квантов $n \le \beta$. Такие ограничения на степень многофотонности уже встречались при рассмотрении рассеяния сильного поля на двухуровневой системе (§12.2).

★ Оценим мощность, поглощаемую единицей объема плазмы стелларатора ($T = 10^2$ Эв, $n = 10^{14}$ см$^{-3}$). В соответствии с §20.3 поглощаемая мощность может быть оценена так:

$$\mathsf{P} \approx \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{\nu}{c} I = \frac{n}{n_s} \cdot \frac{\nu}{c} I \tag{21}$$

где $n_s = 9.80 \cdot 10^{20}$ см$^{-3}$ - концентрация электронов, соответствующая $\omega_p = \omega_s$. Частота столкновений

$$\nu \approx 4\pi N \frac{Z^2 e^4}{m^2 v^3} L(v) \approx 3 \cdot 10^5 L(v)\ \text{с}^{-1} \approx 3 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1}. \tag{22}$$

Итак, $\mathsf{P} \sim 10^{-11}$см^{-1}I. Пусть $I = I_c \approx 10^{14}$ Вт см$^{-2}$, что соответствует максимальной поглощаемой мощности. Тогда поглощаемая единицей объема мощность $\mathsf{P} \approx 10^3$ Вт см$^{-3}$. При длительности импульса лазера $\Delta\tau \approx 10^{-12}$ с получаем прирост энергии электронов за импульс поля $\Delta E \approx 10^{-9}$ Дж см$^{-3} \approx 10^{-4}$ Эв/электрон. Таким образом, подсветка горячей разреженной плазмы лазером - неэффективный способ ее нагрева, что естественно - так как рассматривается поглощение "прозрачной" плазмы (в экспериментах по ЛТС используются образцы с $n \sim 10^{20}$ см$^{-3}$ и излучение отражается от плазмы).

★ Теория ВТЭ используется для объяснения механизма оптического пробоя прозрачных диэлектриков. После многофотонных (а потому редких) переходов электронов из валентной зоны в зону проводимости происходит нагрев электронов проводимости за счет ВТЭ при рассеянии на фононах.

EOL ☯