ЛЕКЦИЯ #20
СИЛЬНОЕ ПОЛЕ - 3

§ 20.1 Метод Крамерса - Хеннебергера: связь с теорией возмущений

◆ В методе Крамерса - Хеннебергера влияние сильного поля на атомную систему описывается как задача об ионизации частицы, находящейся в одном из связанных стационарных состояний в потенциале $U_0(\vec{r})$

$$U_0(\vec{r}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} U(\vec{r} + \vec{\alpha}(t))dt \qquad (1)$$

под действием нестационарного периодического возмущения $V(\vec{r}, t)$

$$V(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t) - U_0(\vec{r}), \qquad (2)$$

где $\vec{\alpha}(t) = -\vec{R}(t) = -\left(e\vec{E}/m\omega^2\right)\cos\omega t$.

◆ Рассмотрим случай слабого поля. Если $\max|\vec{\alpha}(t)| \to 0$, то можно разложить потенциал $U(\vec{r} + \vec{\alpha}(t))$ по $\vec{\alpha}$, ограничившись первым членом:

$$U(\vec{r} + \vec{\alpha}(t)) \approx U(\vec{r}) + \frac{e\vec{E}}{m\omega^2} \nabla U(\vec{r}) \cos\omega t. \qquad (3)$$

С другой стороны, при учете взаимодействия с полем в дипольном приближении (§2.1) действующий на электрон потенциал имеет вид

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) - e\vec{E}\vec{r}\cos\omega t. \qquad (4)$$

Операторы возмущения в выражениях (3) и (4) оказываются **различны** и по зависимости от пространственных координат, и по зависимости от частоты поля. Однако матричные элементы обоих операторов возмущения, входящие в выражение для скорости перехода, при определенных условиях **совпадают**. Действительно,

$$\langle k|\vec{\alpha}(t)\nabla U(\vec{r})|n\rangle = \vec{\alpha}(t)\langle k|\left[\nabla, \hat{H}_0\right]|n\rangle =$$
$$= \vec{\alpha}(t)(E_k - E_n)\langle k|\nabla|n\rangle = \vec{\alpha}(t)\hbar\omega_{kn}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\langle k|\hat{\vec{p}}|n\rangle. \qquad (5)$$

Используя связь между матричными элементами импульса и координаты $\vec{p}_{kn} = im\omega_{kn}\vec{r}_{kn}$ (см. §6.2), получаем

$$V_{kn}^{(H)} = e\vec{E}\left(\frac{\omega_{kn}}{\omega}\right)^2 \vec{r}_{kn} = \left(\frac{\omega_{kn}}{\omega}\right)^2 \vec{d}_{kn}\vec{E}. \qquad (6)$$

Таким образом, для резонансных $(\omega_{kn}=\omega)$ переходов в слабом поле результаты приближения Крамерса - Хеннебергера и обычной теории возмущений совпадают.

§ 20.2 Метод Крамерса - Хеннебергера: стабилизация атома в сильном поле

◆ Для определения характера зависимости скорости ионизации от параметров поля рассмотрим одномерную модель с потенциалом $U(x)=-q\delta(x)$. У такой системы есть одно связанное состояние с энергией связи

$$E_0=-\frac{mq^2}{2\hbar^2}. \tag{7}$$

Усредненный потенциал $U_0(x)$ дается выражением

$$U_0(x)=-q\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\delta(x-a\cos\omega t)dt=-\frac{q}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \tag{8}$$

где $a=e\mathcal{E}/m\omega^2$ есть амплитуда пространственных осцилляций свободного электрона в поле волны. Потенциал притяжения $U_0(x)$ имеет сингулярности в точках $x=\pm a$ и может быть приближенно заменен комбинацией двух корневых ям:

$$U_0(x)\approx-\frac{q}{\pi\sqrt{2a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+a}}-\frac{q}{\pi\sqrt{2a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-x}}. \tag{9}$$

при $|x|\le a$ и $U_0(x)=0$ вне этого интервала. Такая замена оправдана, если амплитуда a велика по сравнению с размером κ^{-1} области локализации ВФ в исходном потенциале,

$$\kappa a=\frac{mqa}{2\hbar^2}>>1. \tag{10}$$

★ Отметим, что хотя в неподвижной δ-яме есть только **ОДНО** связанное состояние, в усредненном потенциале $U_0(x)$ их может быть неограниченно **МНОГО**: величина

$$\mathcal{N}(a)=\frac{1}{\pi\hbar}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{2m|U_0(x)|}dx \tag{11}$$

определяющая квазиклассическое число состояний дискретного спектра, растет с увеличением a, при $\kappa a>>1$ $\mathcal{N}(a)\approx 0.5\sqrt{\kappa a}$.

Поскольку корневые ямы взаимно далеки, в нулевом приближении их можно рассматривать независимо. Рассмотрим дискретный спектр в корневой яме

$$U_r(x) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x}} \quad (x>0), \qquad U_r(x) = 0 \quad (x<0). \tag{12}$$

Из параметров уравнения Шредингера в такой модели можно единственным образом составить характерный масштаб энергии:

$$E_0 = \left(\frac{m\gamma^4}{\hbar^2}\right)^{1/3} \tag{13}$$

Учитывая, что в нашей задаче $\gamma = q/2\pi\sqrt{a}$, приходим к выводу, что с ростом поля глубина уровней (потенциал ионизации) в усредненном потенциале уменьшается по закону $E_n \sim \mathcal{E}^{-2/3}$.

◆ Оператор возмущения $V(x,t)$ зависит от времени периодически и может быть разложен в ряд Фурье:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)\cos n\omega t. \tag{14}$$

Рассмотрим оператор возмущения на частоте поля:

$$V_1(x) = -q\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\cos\omega t\,\delta(x - a\cos\omega t)dt = -\frac{q}{\pi}\cdot\frac{x}{a\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{15}$$

Рассмотрим основное состояние системы в потенциале двух корневых ям. Если частота поля превосходит порог однофотонной ионизации, $\omega > \varepsilon_0/\hbar$, то возмущение $V_1(x)\cos\omega t$ приведет к ионизации системы. Скорость переходов будет определяться золотым правилом Ферми (см. §3.1). Матричный элемент перехода можно вычислить, используя для ВФ начального состояния приближение сильной связи,

$$\psi_i(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(\exp - \lambda|x+a| + \exp - \lambda|x-a|\right), \tag{16}$$

где

$$\lambda = \left(\frac{m\gamma}{\hbar^2}\right)^{2/3} \approx 0.37\left(\frac{m^2q^2}{a\hbar^4}\right)^{1/3} \tag{17}$$

есть обратная длина спадания ВФ основного состояния, а ВФ конечного состояния считая плоской волной, $\psi_f(x) = \sin kx$, где

$$k = \frac{\sqrt{2m(\hbar\omega - \varepsilon_0)}}{\hbar} \tag{18}$$

Матричный элемент перехода дается интегралом

$$M_{if}(a) = -\frac{q\sqrt{\lambda}}{\pi a}\int_0^a \exp - \lambda|x-a|\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\sin kx\, dx. \qquad (19)$$

Функция $M_{if}(a)$ имеет вид затухающих осцилляций; огибающая осцилляций убывает пропорционально $a^{-1/2}$. Поскольку $a \sim \mathcal{E}$, это означает, что с **ростом** величины поля $\mathcal{E}$ скорость однофотонной ионизации, пропорциональная квадрату матричного элемента, **убывает** (осциллируя) как $\dot{W} \sim \mathcal{E}^{-1}$. Это явление, противоположное обычной тенденции к росту скорости ионизации с увеличением интенсивности излучения (см. §§3.2, 10.1, 20.3), называется *стабилизацией атома* сильным полем. Оно не является артефактом, свойственным модели или использованным приближениям, а является общим свойством моделей атомов в очень сильных полях. Физическая причина стабилизации в том, что при больших амплитудах колебаний электрона в поле волны почти все время он находится вдали от атомного остова и является почти свободным - а свободный электрон не поглощает энергию электромагнитного поля.

★ Теоретически стабилизацию описывают многие модели (см., напр., [PG90]). Единственным экспериментальным подтверждением в настоящее время считаются данные работы [vD+97], где при ионизации атома неона (из возбужденного состояния) наблюдалось **отсутствие возрастания** скорости ионизации при увеличении интенсивности поля от $I = 0.5\cdot 10^{14}$ Вт см$^{-2}$ до $I = 2.5\cdot 10^{14}$ Вт см$^{-2}$.

⇨ [PG90] - Pont M., Gavrila M. - Phys. Rev. Lett., 1990, 65, 19, 2362-2365.

⇨ [vD+97] - van Drutten N. et al. - Phys. Rev. A., 1997, 55, 622.

§ 20.3 Поглощение волны в разреженной плазме: классическая модель

◆ Рассмотрим теперь переходы между состояниями непрерывного спектра электрона в сильном переменном поле, связанные с рассеянием электрона на внешнем потенциале. Такие переходы могут использоваться, например, для описания взаимодействия с переменным полем разреженной сильно ионизованной плазмы. При рассеянии на кулоновском потенциале ионов электроны могут изменять свою энергию за счет переменного внешнего поля. Поэтому одной из основных задач теории является вычисление коэффициента поглощения разреженной плазмы.

◆ Рассмотрим вкратце результаты элементарной классической теории взаимодействия волны с плазмой (см. напр. [BPC90]). Движение электрона в плазме можно описать уравнением

$$m\ddot{\vec{r}} + m\nu\dot{\vec{r}} = e\vec{E} \tag{20}$$

Здесь ν есть *частота соударений* - скорость релаксации импульса электрона в отсутствие внешнего поля. Из уравнения (20) получается следующее выражение для диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m(\omega^2+\nu^2)} + i\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{4\pi ne^2}{m(\omega^2+\nu^2)} \tag{21}$$

где n - концентрация электронов.

☆ Доказать, что вкладом от ионов в диэлектрическую проницаемость можно пренебречь.

Электромагнитная волна проходит в плазму, только если $\varepsilon'(\omega) > 0$. Это условие выполняется в области частот $\omega \geq \omega_p$, где *плазменная частота* ω_p определяется соотношением

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi ne^2}{m}. \tag{22}$$

★ Плазменная частота равняется стандартной частоте $\omega_s = 1.77\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ при значении концентрации $n = 9.80\cdot 10^{20}$ см$^{-3}$. Это значение много **меньше**, чем концентрация электронов проводимости в металлах ($n \sim 10^{23}$ см$^{-3}$), и много **больше**, чем концентрация носителей в полупроводниках (типично $n \leq 10^{18}$ см$^{-3}$).

🕮 [ВРС90] - Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. - Теория волн. 2-е изд. - М.: Наука, 1990. - гл. II, §6.

◆ Во многих практически интересных случаях $\omega >> \omega_p$ и отличие $\varepsilon'(\omega)$ от единицы несущественно. Значение $\varepsilon''(\omega)$ при этом также оказывается весьма малым, однако вид зависимости $\varepsilon''(\omega)$ от напряженности поля $\mathcal{E}$ представляет самостоятельный интерес. В этом случае коэффициент поглощения электромагнитной волны,

$$\alpha(\omega) = 2\frac{\omega}{c}\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx \frac{\omega}{c}\varepsilon''(\omega), \tag{22}$$

дается формулой

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi ne^2\nu}{mc(\omega^2+\nu^2)}. \tag{23}$$

★ Поглощаемая мощность при небольшой частоте столкновений ей пропорциональна. Это объясняется тем, что свободные электроны $(\nu = 0)$ не могут приобрести энергию у поля плоской волны. Величина $\alpha(\omega)$ определяет скорость, с которой в пространстве убывает плотность энергии волны. Энергия локально сохраняется: энергия электромагнитного поля переходит в кинетическую энергию вещества - которое само себе служит термостатом.

Входящая в уравнение (20) частота столкновений ν учитывает процессы рассеяния с существенным изменением импульса электрона:

$$\nu(v) = Nv\int \sigma(v,\theta)(1-\cos\theta)d\Omega \tag{24}$$

где N есть плотность ионов, v - скорость столкновения, $\sigma(v,\theta)$ - сечение упругого рассеяния на угол θ. Интеграл в (24) называется *транспортным сечением* σ_t. Для оценки $\nu(v)$ можно принять, что вклад в σ_t дают только столкновения с такими значениями прицельного параметра ρ, что потенциальная энергия взаимодействия $Ze^2\rho^{-1}$ велика в сравнении с начальной кинетической энергией $mv^2/2$. Приняв в качестве границы таких значений такой параметр ρ_0, что

$$\frac{Ze^2}{\rho_0} = \frac{mv^2}{2}, \tag{25}$$

для транспортного сечения σ_t получаем оценку

$$\sigma_t(v) \cong \pi\rho_0^2 = 4\pi\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2. \tag{26}$$

★ При расчете по формуле Резерфорда в транспортном сечении возникает логарифмическая расходимость интеграла на малых углах. Она исчезает при учете 1) экранировки взаимодействия в плазме или 2) квантовых поправок или 3) конечности концентрации ионов. В итоге в ответ входит множителем кулоновский логарифм - слабая функция скорости.
★ Для примера рассмотрим плазму с температурой $T = 3\cdot 10^5$ К, что соответствует тепловой скорости электронов $v_T = 5.5\cdot 10^8$ см с$^{-1}$. Тогда при $N = 10^{18}$ см$^{-3}$ получаем значение $\nu = 5\cdot 10^{10}$ с$^{-1}$ $<< \omega_s$.

◆ При численной оценке ν мы исходили из предположения, что скорость v, входящую в выражение для транспортного сечения, можно считать равной средней тепловой скорости v_T. Это приближение оправдано, если скорость v_F, приобретаемая электроном под действием внешнего поля, мала в сравнении с v_T. В гармоническом поле $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}\cos\omega t$ амплитуда колебаний скорости электрона есть

$$v_F = \frac{e\mathcal{E}}{m\omega}. \tag{27}$$

Она пропорциональна напряженности поля волны. Таким образом, **в слабом** поле, при условии $v_F << v_T$, частота столкновений ν, а с ней и α, **не зависят** от $\mathcal{E}$. Поглощаемая единицей объема мощность P пропорциональна интенсивности излучения: $P \sim \alpha I \sim I$. **В сильном поле**, при условии $v_F >> v_T$, частота столкновений ν, а с ней и α, **обратно пропорциональны кубу** напряженности поля $\mathcal{E}$.

★ Рассматривая частоту столкновений как константу релаксации, мы можем рассматривать этот эффект как зависимость константы релаксации от внешнего поля. Эта возможность обсуждалась в § 17.3.

Поглощаемая единицей объема мощность P обратно пропорциональна квадратному корню из интенсивности излучения: $P \sim \alpha I \sim I^{-3/2} \cdot I$. Граница раздела этих областей, на которой выполняется условие $v_F = v_T$, определяет характерный классический масштаб интенсивности

$$I_c = \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{m^2 v^2 \omega^2}{4e^2}. \tag{28}$$

★ В стандартных условиях значение $I_c = 1.43 \cdot 10^{14}$ Вт см$^{-2}$.

§ 20.4 Поглощение волны в разреженной плазме: квантовая модель - предварительный анализ

◆ Обратимся теперь к анализу этой задачи с точки зрения квантовой теории. Параметром нестационарной теории возмущений является величина

$$\beta = \frac{e\mathcal{E}v}{\hbar\omega^2}. \tag{29}$$

Параметр теории возмущений есть отношение матричного элемента к (энергетической) расстройке, $\beta = V/\hbar\Delta$. Взяв оператор возмущения в pA - калибровке (см. §2.1), $\hat{V} = e\hat{p}A/mc$, получаем $V \sim e\mathcal{E}v/\omega$. Оценка $\hbar\Delta = \hbar\omega$ основана на том, что свободный электрон не может поглотить фотон: в однородном поле импульс сохраняется, и виртуальные переходы происходят в состояния, отстоящие по энергии на $\hbar\omega$ от энергетической поверхности.

★ В ближайшем будущем мы еще дважды получим обоснование формулы (29).

◆ Условие $\beta << 1$ определяет область параметров, в которой по квантовым меркам взаимодействие поля и волны является слабым. Граница этой области определяется условием $\beta = 1$, которое соответствует интенсивности

$$I_q = \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{\hbar^2\omega^4}{e^2 v^2}. \tag{30}$$

Отношение квантового и классического масштабов интенсивностей

$$\frac{I_q}{I_c} = \left(\frac{\hbar\omega}{mv^2/2} \right)^2 = \xi^2 \tag{31}$$

есть квадрат отношения энергии кванта к кинетической энергии электрона.

★ Для частот оптического диапазона и высокотемпературной плазмы эта величина мала. Для кванта стандартной частоты $\hbar\omega_s = 1.86 \cdot 10^{-12}$ эрг. Значению $\xi = 10^{-2}$ соответствует скорость электрона $v = 6.39 \cdot 10^8$ см с$^{-1}$ $= c/47$. Средняя тепловая скорость электрона имеет такую величину при температуре $T = 1.35 \cdot 10^6$ К $= 116$ эВ, при которой плазма почти полностью ионизована. В этих условиях $I_q = 1.43 \cdot 10^{10}$ Вт см$^{-2}$.

В области $I << I_q$ параметр квантовой теории возмущений мал. При этом условии доминируют однофотонные процессы, скорость которых пропорциональна интенсивности внешнего поля. Однако классическая модель указывает, что линейная зависимость поглощаемой мощности от интенсивности сохраняется и в гораздо более широкой области, где параметр квантовой теории возмущений велик, и *a priori* существенны многофотонные процессы (ср. §9.3). Объяснить причину их неэффективности должна квантовая модель, не связанная с применением теории возмущений.

EOL ☯