

## ЛЕКЦИЯ #19 СИЛЬНОЕ ПОЛЕ - 2

### § 19.1 Метод стационарной фазы

◆ Вид ВФ квазиэнергетических состояний электрона в поле волны

$$\Psi(\vec{r}, t) = \mathcal{N} \exp i \frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar} \cdot \varphi(t) \quad (1)$$

$$\varphi(t) = \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{p^2}{2m} t - \frac{e\vec{p}\vec{E}}{m\omega^2} \cos \omega t + \frac{e^2 \vec{E}^2}{4m\omega^2} \left( t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) \right] \quad (2)$$

подсказывает, что при решении задач о переходах между такими состояниями предстоит вычисление интегралов от функций вида  $\exp i\phi(t)$ , в которых  $\phi(t)$  есть нелинейная функция времени. В простейшем приближении величина такого интеграла может считаться пропорциональной значению подынтегральной функции в точке *стационарной фазы*  $t_0$ , где  $\dot{\phi}(t_0) = 0$ :

$$\int \exp i\phi(t) dt \sim \exp i\phi(t_0) \quad (3)$$

★ Отметим аналогию с методом перевала, в котором подынтегральная функция с узким максимумом аппроксимируется гауссовой функцией с той же величиной пика и с тем же поведением вблизи вершины.

Весьма существенно, что точка стационарной фазы в общем случае может соответствовать **комплексному** значению времени.

★ Для примера рассмотрим интеграл вида

$$\int f(t) \exp i\omega t dt, \quad (4)$$

важный для нестационарной теории возмущений (см. §2.2, формула (14)) и определяющий спектр импульса  $f(t)$ . Для гауссова импульса  $f(t) = \exp -t^2/2$  фаза есть  $\phi(t) = it^2/2 + \omega t$ , и единственная точка стационарной фазы,  $t_0 = i\omega$ , лежит на мнимой оси. Согласно оценке (3), интеграл равен  $\exp i\phi(t_0) = \exp -\omega^2/2$ , что с экспоненциальной точностью совпадает с точным результатом.

Более точное приближение [Ф87] учитывает значение второй производной фазы в точке стационарной фазы,  $\ddot{\phi}(t_0) = \alpha$ . В результате правая часть (3) должна быть домножена на величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp i \frac{\pi}{4}. \quad (5)$$

📖 [Ф87] - Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1987. - 544 с. - гл. III.

☆ Методом стационарной фазы вычислить интеграл (4) с  $f(t) = (1+t^2)^{-1}$  и сравнить с точным результатом. В этой задаче две точки стационарной фазы. Какую из них следует выбрать для оценки интеграла?

## § 19.2 Ионизация атомов сильным полем

◆ Рассмотрим задачу об ионизации атомов переменным однородным электрическим внешним полем  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \cos \omega t$  в следующей модели.

1. Начальное состояние системы  $\psi_i$  есть единственное состояние дискретного спектра с энергией связи  $E_0 = \hbar \omega_0$ . Пренебрегая влиянием внешнего поля, примем, что оно описывается ВФ стационарного состояния в отсутствие поля,  $\psi_i \equiv \phi_0$ .

2. Конечное состояние системы опишем ВФ квазиэнергетического состояния электрона в поле волны, найденной в § 18.3,  $\psi_f \equiv \Psi$ . При этом мы пренебрегаем влиянием потенциала атомного остатка на электрон в конечном состоянии.

★ По общим правилам теории возмущений, амплитуда перехода дается матричным элементом  $M = \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_f \rangle$ . Что взять в качестве оператора возмущения  $\hat{A}$ ? В начальном состоянии точно учтен оператор взаимодействия электрона с атомным остатком  $\hat{V}_U$  и отброшен оператор взаимодействия с полем  $\hat{V}_F$ . Напротив, в конечном состоянии точно учтен  $\hat{V}_F$  и отброшен  $\hat{V}_U$ . Из этой симметрии следует, что оператор между обкладками может (должен) быть **единичным**. Отметим аналогию с вычислением вероятностей переходов при внезапных возмущениях, в которых амплитуда перехода равна скалярному произведению начальной и конечной волновых функций.

Итак,

$$M = \langle \psi_i | \psi_f \rangle. \quad (6)$$

При расчете скорости однофотонной ионизации в § 3.1, для суммарной скорости перехода в состояния непрерывного спектра было получено выражение

$$\dot{W} = \int d\nu \frac{|V|^2}{\hbar^2} \left\{ \frac{d}{dt} \left| \int_0^t \exp i \Delta(\nu) t' dt' \right|^2 \right\} \quad (7)$$

где расстройка  $\Delta(\nu) = [E(\nu) - E_0] \hbar^{-1}$  зависела от индекса конечного состояния, но не от времени. При использовании в качестве ВФ конечного состояния квазиэнергетической ВФ получаем

$$\dot{W} = \int d\mathbf{v} \frac{|V|^2}{\hbar^2} \left\{ \frac{d}{dt} \left| \int \exp i \int \Delta(\mathbf{v}, t'') dt' dt'' \right|^2 \right\} \quad (8)$$

где зависящая от времени расстройка дается выражением

$$\Delta(\mathbf{v}, t) = \omega_0 + \frac{1}{2m\hbar} \left( \vec{p} + \frac{e}{\omega} \vec{E} \sin \omega t \right)^2. \quad (9)$$

Основной вклад в скорость переходов дают состояния с малыми конечными импульсами (чем больше  $\vec{p}$ , тем быстрее осциллирует подынтегральное выражение и тем меньше интеграл). Положив  $\vec{p} = 0$ , оценим входящий в (8) интеграл по  $dt'$  методом перевала.

$$\phi(t) = \int \Delta(0, t') dt', \quad \dot{\phi}(t) = \Delta(0, t). \quad (10)$$

Точки стационарной фазы определяются уравнением

$$\dot{\phi} = \omega_0 + \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega^2} \sin^2 \omega t = 0. \quad (11)$$

или

$$\sin^2 \omega t = -\frac{2m\hbar\omega^2\omega_0}{e^2\mathcal{E}^2} = -\gamma^2 \quad (12)$$

где безразмерный параметр задачи

$$\gamma = \frac{\omega}{e\mathcal{E}} \sqrt{2m\hbar\omega_0} \quad (13)$$

называется *параметром адиабатичности*.

★ Из 6 параметров исходной модели можно построить 3 безразмерных комбинации. В нашем подходе предполагается, что  $\omega \ll \omega_0$  и  $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_a$ : все контролируется одним безразмерным параметром  $\gamma$ , потому что по двум другим мы находимся в асимптотической области.

◆ Интерпретируем параметр адиабатичности. Название подсказывает представление  $\gamma$  в виде произведения частоты поля  $\omega$  на характерное время эволюции системы  $T$ :

$$\gamma = \omega T, \quad T = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega_0}}{e\mathcal{E}} \quad (14)$$

Пусть система, в которой электрон связан короткодействующим потенциалом и имеет энергию  $E_0 = -\hbar\omega_0$ , помещена во внешнее однородное постоянное электрическое поле с потенциальной энергией  $U(x) = -e\mathcal{E}x$ . Такая система будет обладать лишь квазистационарными состояниями, так как частица мо-

жет уйти на бесконечность в результате туннелирования через барьер. Длина барьера

$$L = \frac{\hbar\omega_0}{e\mathcal{E}} \quad (15)$$

Скорость подбарьерного движения  $v_t$  можно оценить так:

$$v_t = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{m}}. \quad (16)$$

Время туннелирования (время подбарьерного движения) можно оценить как отношение длины барьера к характерной скорости подбарьерного движения:

$$T_t \sim \frac{L}{v_t} \sim \frac{\sqrt{m\hbar\omega_0}}{e\mathcal{E}}. \quad (17)$$

Оно совпадает (параметрически) со входящим в определение  $\gamma$  характерным масштабом  $T$ . Итак: параметр адиабатичности пропорционален отношению времени туннелирования  $T_t$  к периоду изменения внешнего поля  $T_f = 2\pi\omega^{-1}$ .

★ Оценим параметры, соответствующие порогу адиабатичности,  $\gamma = 1$ . Положим  $\omega = \omega_s = 1.77 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , для частоты ионизации примем значение  $\omega_0 = 10\omega_s$ . Тогда условие  $\gamma = 1$  будет выполняться при напряженности поля  $\mathcal{E} = 6.9 \cdot 10^5 \text{ Гс} \approx 750\mathcal{E}_s$ , что соответствует интенсивности излучения  $I = 5.7 \cdot 10^{13} \text{ Вт см}^{-2}$ .

### § 19.3 Формула Келдыша

◆ Обратимся теперь к вычислению внутренних интегралов в формуле

$$\dot{W} = \int d\nu \frac{|V|^2}{\hbar^2} \left\{ \frac{d}{dt} \left| \int \exp i \int \Delta(\nu, t'') dt'' dt' \right|^2 \right\}. \quad (18)$$

Точки стационарной фазы определяются уравнением

$$\sin^2 \omega t = -\frac{2m\hbar\omega^2\omega_0}{e^2\mathcal{E}^2} = -\gamma^2, \quad (19)$$

откуда  $t = n\pi + i\tau$ , где  $n$  - целое, а

$$\tau = \frac{1}{\omega} \text{Arsh } \gamma. \quad (20)$$

Они эквидистантно расположены вдоль действительной оси. Поэтому величина  $\dot{W}$  пропорциональна квадрату модуля вклада от одной такой точки. Вычислим этот вклад для точки  $t = i\tau$ .

$$\phi_0 = \omega_0 \int_0^{\tau} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \text{sh}^2 \omega z \right) dz = \frac{\omega_0}{\omega} \int_0^{\text{Arsh} \gamma} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \text{sh}^2 x \right) dx. \quad (21)$$

Интегрирование возможно в элементарных функциях. В результате получаем

$$\dot{W} \sim \exp \left\{ -2 \frac{\omega_0}{\omega} f(\gamma) \right\}, \quad (22A)$$

$$f(\gamma) = \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \text{Arsh} \gamma - \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma}. \quad (22B)$$

Формула (22) называется *формулой Келдыша* [К64].

∞ [К64] - Келдыш Л.В. - ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 5, с. 1945 - 1957.

◆ Рассмотрим предельные случаи формулы Келдыша. Если параметр адиабатичности мал,  $\gamma \ll 1$ , что соответствует **сильным и низкочастотным** полям, то асимптотика  $f(\gamma)$  имеет вид  $f(\gamma) \approx 2\gamma/3$  и

$$\dot{W} \sim \exp \left( -\frac{4\omega_0}{3e\mathcal{E}} \sqrt{2m\hbar\omega_0} \right). \quad (23)$$

Выражение для скорости ионизации **вовсе не зависит** от частоты поля  $\omega$  и сохраняет применимость в статическом случае  $\omega = 0$ . Для такого случая скорость ионизации пропорциональна коэффициенту прохождения через треугольный потенциальный барьер. Последний может быть найден методом ВКБ. Вычисление по формуле

$$\dot{W} \sim T \approx \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \int_{x_L}^{x_R} |p(x)| dx \right), \quad (24)$$

где

$$p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))} = i\sqrt{2m(\hbar\omega_0 - e\mathcal{E}x)}, \quad (25)$$

приводит в точности к выражению (23). Таким образом, при  $\gamma \ll 1$  ионизация имеет характер туннелирования через стационарный потенциальный барьер и называется *туннельной*.

◆ Рассмотрим противоположный предельный случай. Если параметр адиабатичности велик,  $\gamma \gg 1$ , что соответствует **слабым и высокочастотным** полям, то асимптотика  $f(\gamma)$  имеет вид  $f(\gamma) \approx \ln 2\gamma$  и

$$\dot{W} \sim \left( \frac{e\mathcal{E}}{\omega\sqrt{2m\hbar\omega_0}} \right)^{2\frac{\omega_0}{\omega}}. \quad (26)$$

Сравним это выражение с оценкой скорости многофотонной ионизации, найденной по теории возмущений (§9.3):

$$\dot{W} \sim \left( \frac{ea\mathcal{E}}{2\hbar\tilde{\Delta}} \right)^{2N}. \quad (27)$$

Зависимость скорости ионизации от напряженности поля оказывается степенной, при этом показатели степени отличаются мало. Роль характерной длины  $a$ , оценивающей матричный элемент координаты, в выражении (26) играет характерный размер области локализации частицы в потенциале нулевого радиуса с энергией связи  $\hbar\omega_0$ :

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \quad (28)$$

Наконец, роль эффективной расстройки играет частота внешнего поля  $\tilde{\Delta} = \omega$ . Таким образом, при  $\gamma \gg 1$  ионизация имеет характер многофотонного поглощения (минимального числа) квантов внешнего поля и называется *многофотонной*. С увеличением напряженности поля при  $\gamma \approx 1$  происходит смена многофотонного режима ионизации туннельным.

### **§ 19.4 Метод Крамерса - Хеннебергера:** **общая идея**

◆ По предположению, использованному при выводе формулы Келдыша, у системы есть только одно связанное состояние - электрон связан слабым и короткодействующим потенциалом. Пренебrecь влиянием внешнего поля на начальное состояние системы можно в том случае, когда матричный элемент взаимодействия  $V = ea\mathcal{E}$  мал в сравнении с энергией связи  $E_0 = \hbar\omega_0$ . Условие  $V \ll E_0$  эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{\gamma} \ll \frac{\omega_0}{\omega}. \quad (29)$$

Таким образом, для очень сильных полей формула Келдыша неприменима, и необходимо использовать другие подходы. Одним из них является *метод Крамерса - Хеннебергера* [Н68].

⇒ [Н68] - Henneberger W.C. - Phys. Rev. Lett., 1968, 21, 12, 838-841.

◆ В основе метода лежит следующая эвристическая картина. Рассмотрим классический гамильтониан электрона в присутствии однородного переменного электрического поля и потенциала  $U(\vec{r})$ ,

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{\omega} \vec{E} \cos \omega t \right)^2 + U(\vec{r}). \quad (30)$$

В нулевом приближении пренебрежем влиянием потенциала  $U(\vec{r})$ . Закон движения свободного электрона в поле волны имеет вид:

$$\vec{R}(t) = -\frac{e\vec{E}}{m\omega^2} \cos \omega t. \quad (31)$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с электроном. В этой системе на электрон будет действовать возмущающий потенциал

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r} + \vec{\alpha}(t)), \quad (32)$$

где  $\vec{\alpha}(t) = -\vec{R}(t)$ . Этот потенциал можно разложить на две части - постоянный усредненный потенциал

$$U_0(\vec{r}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} U(\vec{r} + \vec{\alpha}(t)) dt \quad (33)$$

и зависящее от времени возмущение

$$V(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t) - U_0(\vec{r}). \quad (34)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу для квантовой модели как задачу об ионизации частицы, находящейся в одном из связанных стационарных состояний в потенциале  $U_0(\vec{r})$ , под действием нестационарного периодического возмущения  $V(\vec{r}, t)$ .

★ Концепция решения уравнения Шредингера в системе координат, положение которой в пространстве меняется в соответствии с классическим законом движения частицы, использовалась выше при рассмотрении динамики гармонического осциллятора в §13.2.