ЛЕКЦИЯ #19
СИЛЬНОЕ ПОЛЕ - 2

§ 19.1 Метод стационарной фазы

◆ Вид ВФ квазиэнергетических состояний электрона в поле волны

$$\Psi(\vec{r},t)=\mathcal{N}\exp i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}\cdot\varphi(t) \qquad (1)$$

$$\varphi(t)=\exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m}t-\frac{e\vec{p}\vec{E}}{m\omega^2}\cos\omega t+\frac{e^2\vec{E}^2}{4m\omega^2}\left(t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\right] \qquad (2)$$

подсказывает, что при решении задач о переходах между такими состояниями предстоит вычисление интегралов от функций вида $\exp i\phi(t)$, в которых $\phi(t)$ есть нелинейная функция времени. В простейшем приближении величина такого интеграла может считаться пропорциональной значению подынтегральной функции в точке *стационарной фазы* t_0, где $\dot{\phi}(t_0)=0$:

$$\int \exp i\phi(t)\,dt \sim \exp i\phi(t_0) \qquad (3)$$

★ Отметим аналогию с методом перевала, в котором подынтегральная функция с узким максимумом аппроксимируется гауссовой функцией с той же величиной пика и с тем же поведением вблизи вершины.

Весьма существенно, что точка стационарной фазы в общем случае может соответствовать **комплексному** значению времени.

★ Для примера рассмотрим интеграл вида

$$\int f(t)\exp i\omega t\,dt, \qquad (4)$$

важный для нестационарной теории возмущений (см. §2.2, формула (14)) и определяющий спектр импульса $f(t)$. Для гауссова импульса $f(t)=\exp -t^2/2$ фаза есть $\phi(t)=i\,t^2/2+\omega t$, и единственная точка стационарной фазы, $t_0=i\omega$, лежит на мнимой оси. Согласно оценке (3), интеграл равен $\exp i\phi(t_0)=\exp-\omega^2/2$, что с экспоненциальной точностью совпадает с точным результатом.

Более точное приближение [Ф87] учитывает значение второй производной фазы в точке стационарной фазы, $\ddot{\phi}(t_0)=\alpha$. В результате правая часть (3) должна быть домножена на величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z^2}dz=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp i\frac{\pi}{4}. \qquad (5)$$

🕮 [Ф87] - Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1987. - 544 с. - гл. III.

☆ Методом стационарной фазы вычислить интеграл (4) с $f(t)=\left(1+t^2\right)^{-1}$ и сравнить с точным результатом. В этой задаче две точки стационарной фазы. Какую из них следует выбрать для оценки интеграла?

§ 19.2 Ионизация атомов сильным полем

◆ Рассмотрим задачу об ионизации атомов переменным однородным электрическим внешним полем $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}\cos\omega t$ в следующей модели.

1. Начальное состояние системы ψ_i есть единственное состояние дискретного спектра с энергией связи $E_0=\hbar\omega_0$. Пренебрегая влиянием внешнего поля, примем, что оно описывается ВФ стационарного состояния в отсутствие поля, $\psi_i\equiv\varphi_0$.

2. Конечное состояние системы опишем ВФ квазиэнергетического состояния электрона в поле волны, найденной в § 18.3, $\psi_f\equiv\Psi$. При этом мы пренебрегаем влиянием потенциала атомного остатка на электрон в конечном состоянии.

★ По общим правилам теории возмущений, амплитуда перехода дается матричным элементом $M=\left\langle\psi_i\left|\hat{A}\right|\psi_f\right\rangle$. Что взять в качестве оператора возмущения $\hat{A}$? В начальном состоянии точно учтен оператор взаимодействия электрона с атомным остатком $\hat{V}_U$ и отброшен оператор взаимодействия с полем $\hat{V}_F$. Напротив, в конечном состоянии точно учтен $\hat{V}_F$ и отброшен $\hat{V}_U$. Из этой симметрии следует, что оператор между обкладками может (должен) быть **единичным**. Отметим аналогию с вычислением вероятностей переходов при внезапных возмущениях, в которых амплитуда перехода равна скалярному произведению начальной и конечной волновых функций.

Итак,

$$M=\left\langle\psi_i\middle|\psi_f\right\rangle. \tag{6}$$

При расчете скорости однофотонной ионизации в § 3.1, для суммарной скорости перехода в состояния непрерывного спектра было получено выражение

$$\dot{W}=\int d\nu\frac{|V|^2}{\hbar^2}\left\{\frac{d}{dt}\left|\int^t\exp i\Delta(\nu)t'\,dt'\right|^2\right\} \tag{7}$$

где расстройка $\Delta(\nu)=\left[E(\nu)-E_0\right]\hbar^{-1}$ зависела от индекса конечного состояния, но не от времени. При использовании в качестве ВФ конечного состояния квазиэнергетической ВФ получаем

$$\dot{W} = \int d\nu \frac{|V|^2}{\hbar^2} \left\{ \frac{d}{dt} \left| \int^{t} \exp i \int^{t'} \Delta(\nu, t'') dt' \, dt'' \right|^2 \right\} \tag{8}$$

где зависящая от времени расстройка дается выражением

$$\Delta(\nu, t) = \omega_0 + \frac{1}{2m\hbar} \left(\vec{p} + \frac{e}{\omega} \vec{E} \sin \omega t \right)^2 . \tag{9}$$

Основной вклад в скорость переходов дают состояния с малыми конечными импульсами (чем больше $\vec{p}$, тем быстрее осциллирует подынтегральное выражение и тем меньше интеграл). Положив $\vec{p} = 0$, оценим входящий в (8) интеграл по dt' методом перевала.

$$\phi(t) = \int^{t} \Delta(0, t') dt', \qquad \dot{\phi}(t) = \Delta(0, t). \tag{10}$$

Точки стационарной фазы определяются уравнением

$$\dot{\phi} = \omega_0 + \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{2m\hbar\omega^2} \sin^2 \omega t = 0. \tag{11}$$

или

$$\sin^2 \omega t = -\frac{2m\hbar\omega^2\omega_0}{e^2 \mathcal{E}^2} = -\gamma^2 \tag{12}$$

где безразмерный параметр задачи

$$\gamma = \frac{\omega}{e\mathcal{E}} \sqrt{2m\hbar\omega_0} \tag{13}$$

называется *параметром адиабатичности.*

★ Из 6 параметров исходной модели можно построить 3 безразмерных комбинации. В нашем подходе предполагается, что $\omega << \omega_0$ и $\mathcal{E} << \mathcal{E}_a$: все контролируется одним безразмерным параметром γ, потому что по двум другим мы находимся в асимптотической области.

◆ Интерпретируем параметр адиабатичности. Название подсказывает представление γ в виде произведения частоты поля ω на характерное время эволюции системы T:

$$\gamma = \omega T, \qquad T = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega_0}}{e\mathcal{E}} \tag{14}$$

Пусть система, в которой электрон связан короткодействующим потенциалом и имеет энергию $E_0 = -\hbar\omega_0$, помещена во внешнее однородное постоянное электрическое поле с потенциальной энергией $U(x) = -e\mathcal{E}x$. Такая система будет обладать лишь квазистационарными состояниями, так как частица может уйти на бесконечность в результате туннелирования через барьер. Длина барьера

$$L = \frac{\hbar\omega_0}{e\mathcal{E}} \tag{15}$$

Скорость подбарьерного движения v_t можно оценить так:

$$v_t = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{m}}. \tag{16}$$

Время туннелирования (время подбарьерного движения) можно оценить как отношение длины барьера к характерной скорости подбарьерного движения:

$$T_t \sim \frac{L}{v_t} \sim \frac{\sqrt{m\hbar\omega_0}}{e\mathcal{E}}. \tag{17}$$

Оно совпадает (параметрически) со входящим в определение γ характерным масштабом T. Итак: параметр адиабатичности пропорционален отношению времени туннелирования T_t к периоду изменения внешнего поля $T_f = 2\pi\omega^{-1}$.

★ Оценим параметры, соответствующие порогу адиабатичности, $\gamma = 1$. Положим $\omega = \omega_s = 1.77\cdot 10^{15}\,\text{с}^{-1}$, для частоты ионизации примем значение $\omega_0 = 10\omega_s$. Тогда условие $\gamma = 1$ будет выполняться при напряженности поля $\mathcal{E} = 6.9\cdot 10^5\,\text{Гс} \approx 750\mathcal{E}_s$, что соответствует интенсивности излучения $I = 5.7\cdot 10^{13}\,\text{Вт см}^{-2}$.

§ 19.3 Формула Келдыша

◆ Обратимся теперь к вычислению внутренних интегралов в формуле

$$\dot{W} = \int d\nu \frac{|V|^2}{\hbar^2}\left\{\frac{d}{dt}\left|\int^{t} \exp i\int^{t'} \Delta(\nu, t'')\,dt''\,dt'\right|^2\right\}. \tag{18}$$

Точки стационарной фазы определяются уравнением

$$\sin^2\omega t = -\frac{2m\hbar\omega^2\omega_0}{e^2\mathcal{E}^2} = -\gamma^2, \tag{19}$$

откуда $t = n\pi + i\tau$, где n - целое, а

$$\tau = \frac{1}{\omega}\operatorname{Arsh}\gamma. \tag{20}$$

Они эквидистантно расположены вдоль действительной оси. Поэтому величина $\dot{W}$ пропорциональна квадрату модуля вклада от одной такой точки. Вычислим этот вклад для точки $t = i\tau$.

$$\phi_0 = \omega_0 \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \mathrm{sh}^2 \omega z\right) dz = \frac{\omega_0}{\omega} \int_0^{\mathrm{Arsh}\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \mathrm{sh}^2 x\right) dx. \tag{21}$$

Интегрирование возможно в элементарных функциях. В результате получаем

$$\dot{W} \sim \exp\left\{-2\frac{\omega_0}{\omega} f(\gamma)\right\}, \tag{22A}$$

$$f(\gamma) = \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right) \mathrm{Arsh}\gamma - \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma}. \tag{22B}$$

Формула (22) называется *формулой Келдыша* [К64].

[К64] - Келдыш Л.В. - ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 5, с. 1945 - 1957.

◆ Рассмотрим предельные случаи формулы Келдыша. Если параметр адиабатичности мал, $\gamma << 1$, что соответствует **сильным и низкочастотным** полям, то асимптотика $f(\gamma)$ имеет вид $f(\gamma) \approx 2\gamma/3$ и

$$\dot{W} \sim \exp\left(-\frac{4\omega_0}{3e\mathcal{E}} \sqrt{2m\hbar\omega_0}\right). \tag{23}$$

Выражение для скорости ионизации вовсе **не зависит** от частоты поля ω и сохраняет применимость в статическом случае $\omega = 0$. Для такого случая скорость ионизации пропорциональна коэффициенту прохождения через треугольный потенциальный барьер. Последний может быть найден методом ВКБ. Вычисление по формуле

$$\dot{W} \sim T \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_L}^{x_R} |p(x)| dx\right), \tag{24}$$

где

$$p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))} = i\sqrt{2m(\hbar\omega_0 - e\mathcal{E}x)}, \tag{25}$$

приводит в точности к выражению (23). Таким образом, при $\gamma << 1$ ионизация имеет характер туннелирования через стационарный потенциальный барьер и называется *туннельной*.

◆ Рассмотрим противоположный предельный случай. Если параметр адиабатичности велик, $\gamma >> 1$, что соответствует **слабым и высокочастотным** полям, то асимптотика $f(\gamma)$ имеет вид $f(\gamma) \approx \ln 2\gamma$ и

$$\dot{W} \sim \left(\frac{e\mathcal{E}}{\omega\sqrt{2m\hbar\omega_0}}\right)^{2\frac{\omega_0}{\omega}}. \tag{26}$$

Сравним это выражение с оценкой скорости многофотонной ионизации, найденной по теории возмущений (§9.3):

$$\dot{W} \sim \left(\frac{ea\mathcal{E}}{2\hbar\tilde{\Delta}} \right)^{2N}. \qquad (27)$$

Зависимость скорости ионизации от напряженности поля оказывается степенной, при этом показатели степени отличаются мало. Роль характерной длины a, оценивающей матричный элемент координаты, в выражении (26) играет характерный размер области локализации частицы в потенциале нулевого радиуса с энергией связи $\hbar\omega_0$:

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \qquad (28)$$

Наконец, роль эффективной расстройки играет частота внешнего поля $\tilde{\Delta} = \omega$. Таким образом, при $\gamma >> 1$ ионизация имеет характер многофотонного поглощения (минимального числа) квантов внешнего поля и называется *многофотонной*. С увеличением напряженности поля при $\gamma \approx 1$ происходит смена многофотонного режима ионизации туннельным.

§ 19.4 Метод Крамерса - Хеннебергера: общая идея

◆ По предположению, использованному при выводе формулы Келдыша, у системы есть только одно связанное состояние - электрон связан слабым и короткодействующим потенциалом. Пренебречь влиянием внешнего поля на начальное состояние системы можно в том случае, когда матричный элемент взаимодействия $V = ea\mathcal{E}$ мал в сравнении с энергией связи $E_0 = \hbar\omega_0$. Условие $V << E_0$ эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{\gamma} << \frac{\omega_0}{\omega}. \qquad (29)$$

Таким образом, для очень сильных полей формула Келдыша неприменима, и необходимо использовать другие подходы. Одним из них является *метод Крамерса - Хеннебергера* [H68].

[H68] - Henneberger W.C. - Phys. Rev. Lett., 1968, 21, 12, 838-841.

◆ В основе метода лежит следующая эвристическая картина. Рассмотрим классический гамильтониан электрона в присутствии однородного переменного электрического поля и потенциала $U(\vec{r})$,

$$H=\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{\omega}\vec{E}\cos\omega t\right)^2+U(\vec{r}). \qquad (30)$$

В нулевом приближении пренебрежем влиянием потенциала $U(\vec{r})$. Закон движения свободного электрона в поле волны имеет вид:

$$\vec{R}(t)=-\frac{e\vec{E}}{m\omega^2}\cos\omega t. \qquad (31)$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с электроном. В этой системе на электрон будет действовать возмущающий потенциал

$$U(\vec{r},t)=U\left(\vec{r}+\vec{\alpha}(t)\right), \qquad (32)$$

где $\vec{\alpha}(t)=-\vec{R}(t)$. Этот потенциал можно разложить на две части - постоянный усредненный потенциал

$$U_0(\vec{r})=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}U\left(\vec{r}+\vec{\alpha}(t)\right)dt \qquad (33)$$

и зависящее от времени возмущение

$$V(\vec{r},t)=U(\vec{r},t)-U_0(\vec{r}). \qquad (34)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу для квантовой модели как задачу об ионизации частицы, находящейся в одном из связанных стационарных состояний в потенциале $U_0(\vec{r})$, под действием нестационарного периодического возмущения $V(\vec{r},t)$.

★ Концепция решения уравнения Шредингера в системе координат, положение которой в пространстве меняется в соответствии с классическим законом движения частицы, использовалась выше при рассмотрении динамики гармонического осциллятора в §13.2.

EOL ☯