ЛЕКЦИЯ #11
ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА - 2

§ 11.1 Вектор Блоха

◆ Состояния двухуровневой системы, взаимодействующей с переменным полем, удобно описывать с помощью компонент вектора Блоха - комбинаций амплитуд состояний 1 и 2, тесно связанных с наблюдаемыми величинами. Если двухуровневая система находится в состоянии с ВФ

$$\Psi(t) = A(t)\varphi_1(\vec{r}) + B(t)\varphi_2(\vec{r}), \tag{1}$$

то по определению компоненты *вектора Блоха* P, Q и R есть

$$P = A^* B + AB^*, \quad Q = i\left(A^* B - AB^*\right), \quad R = |B|^2 - |A|^2. \tag{2}$$

Величина R - разность населенностей уровней 2 и 1 - называется *продольной* компонентой, а P и Q *поперечными* компонентами. Величина R может быть связана с мгновенным значением средней энергии системы: $\langle E \rangle = \hbar\omega_{21} R$. Величины P и Q пропорциональны действительной и мнимой частям вектора дипольного момента системы. Если матричный элемент перехода имеет вид

$$\vec{d}_{12} = \langle 1 | e\vec{r} | 2 \rangle = \vec{d}_1 + i\vec{d}_2, \tag{3}$$

где $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ - действительные векторы, то дипольный момент в состоянии с волновой функцией (1) есть $\vec{d} = P\vec{d}_1 + Q\vec{d}_2$. Практически всегда можно выбрать функции $\varphi_1(\vec{r})$ и $\varphi_2(\vec{r})$ действительными и положить $\vec{d}_2 = 0$, что мы и предполагаем в дальнейшем.

◆ Найдем вид динамических уравнений для величин P, Q и R в переменном поле. Если $\vec{d}_2 = 0$, тогда в переменном электрическом поле $\vec{E} f(t)$ частота Раби $\Omega = \vec{d}_1 \vec{E} / \hbar$ будет действительна. Уравнения для быстрых амплитуд имеют вид

$$i\frac{dA}{dt} = \omega_1 A + B\Omega f(t), \quad i\frac{dB}{dt} = \omega_2 B + A\Omega f(t). \tag{4}$$

Из этой системы уравнений и определения компонент вектора Блоха следует система *уравнений Блоха*

$$\frac{dP}{dt} = -\omega_{21} Q, \quad \frac{dQ}{dt} = \omega_{21} P - 2\Omega f(t) R, \quad \frac{dR}{dt} = 2\Omega f(t) Q. \tag{5}$$

Система имеет первый интеграл $J_1 = P^2 + Q^2 + R^2 \equiv S^2$. Учитывая условие нормировки ВФ $|A|^2 + |B|^2 = 1$, находим, что $S^2 = 1$. Таким образом, величины P, Q и R можно рассматривать как декартовы компоненты вектора единичной длины, а состояние системы изображать точкой на сфере единичного радиуса - *сфере Блоха*.

☆ Описание двухуровневой системы амплитудами A, B требует задания **четырех** действительных параметров ($\mathrm{Re}\, A, B$ и $\mathrm{Im}\, A, B$), подчиненных одному условию нормировки. Описание с помощью компонент вектора Блоха требует задания **трех** действительных параметров P, Q и R, подчиненных одному условию нормировки. Какую информацию содержит опущенный при переходе от амплитуд к компонентам вектора Блоха параметр?

★ Заметим, что если записывать волновую функцию двухуровневой системы как столбец,

$$\Psi = \begin{vmatrix} B\varphi_2 \\ A\varphi_1 \end{vmatrix}$$

то величины P, Q и R, можно представить в виде средних значений матриц Паули:

$$P = \langle \Psi | \sigma_1 | \Psi \rangle, \quad Q = \langle \Psi | \sigma_2 | \Psi \rangle, \quad R = \langle \Psi | \sigma_3 | \Psi \rangle$$

Матрицы Паули пропорциональны компонентам оператора спинового момента для частицы со спином $1/2$. В силу этого сходства вектор Блоха называют также вектором *квазиспина* или *энергетического спина*.

◆ Обратимся к рассмотрению эволюции двухуровневой системы в гармоническом переменном поле $f(t) = \cos\omega t$ в случае, близком к резонансу. Если выполнено условие $\beta_+ \ll 1$ (т.е. если $\Omega \ll \omega_{21}, \omega$), то скорости изменения поперечных компонент P и Q значительно больше скорости изменения разности населенностей R. Для рассмотрения окрестности резонанса удобно перейти к компонентам вектора Блоха во **вращающейся** с угловой скоростью ω системе координат. В такой системе скорости изменения P, Q и R будут иметь одинаковый порядок величин.

Введем переменные

$$u = P\cos\omega t + Q\sin\omega t, \quad v = -P\sin\omega t + Q\cos\omega t, \quad w = -R. \qquad (6)$$

В этих переменных система уравнений Блоха (5) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\Delta v + \Omega w \sin 2\omega t, \\ \dot{v} &= \Delta u + 2\Omega w \cos^2 \omega t, \\ \dot{w} &= -2\Omega(u\sin\omega t + v\cos\omega t)\cos\omega t. \end{aligned} \qquad (7)$$

Нас интересует эволюция системы с характерными скоростями порядка Δ или Ω, много меньшими ω. Поэтому в системе уравнений (7) можно заменить быстро осциллирующие тригонометрические функции их **средними** значениями. Таким образом получается следующий вид системы уравнений Блоха для вращающихся компонент вблизи резонанса:

$$\boxed{\dot{u} = -\Delta v, \quad \dot{v} = \Delta u + \Omega w, \quad \dot{w} = -\Omega v.} \qquad (8)$$

Эта автономная система третьего порядка имеет два интеграла движения. Первый из них,

$$J_1 = u^2 + v^2 + w^2 \equiv S^2 = 1, \tag{9}$$

указывает, что несмотря на сделанные при выводе (8) приближения, состояние системы по-прежнему описывается точкой на поверхности сферы единичного радиуса. Второй интеграл движения,

$$J_2 = \Omega u - \Delta w, \tag{10}$$

задает уравнение плоскости, секущей сферу Блоха. Таким образом, конец вектора Блоха системы в гармоническом поле будет описывать окружность на поверхности сферы Блоха.

◆ Использование интегралов позволяет найти решения системы (8). Для изучавшихся ранее начальных условий, соответствующих системе в состоянии $|1\rangle$ до начала действия поля ($u(0) = v(0) = 0$, $w(0) = 1$), решение имеет вид

$$\begin{gathered} u(t) = -\frac{\Delta\Omega}{\Omega_+^2}\left(1 - \cos\Omega_+ t\right), \qquad v(t) = \frac{\Omega}{\Omega_+}\sin\Omega_+ t, \\ w(t) = \frac{\Delta^2 + \Omega^2\cos\Omega_+ t}{\Omega_+^2} \end{gathered} \tag{11}$$

При точном резонансе ($\Delta = 0$) вектор Блоха всегда находится в плоскости OVW.

§ 11.2 Сдвиг Блоха - Зигерта

◆ Усреднение системы (7) эквивалентно использованию приближения вращающегося поля (§ 10.3). Точная система уравнений (7) позволяет отыскать поправки к решениям этого приближения. Перепишем полную систему в виде

$$\begin{aligned} \dot u &= -\Delta v + \Omega w \sin 2\omega t, \\ \dot v &= \Delta u + \Omega w + \Omega w \cos 2\omega t, \\ \dot w &= -\Omega v - \Omega u \sin 2\omega t - \Omega v \cos 2\omega t. \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть u_0, v_0 и w_0 - решения усредненной системы. Положим $w = w_0 + w_1$. Тогда для поправки w_1 получаем уравнение

$$\dot w_1 = -\Omega u_0 \sin 2\omega t - \Omega v_0 \cos 2\omega t. \tag{13}$$

Переменные u_0 и v_0 изменяются медленно. Проинтегрируем уравнение (13), считая их константами: тогда

$$w_1(t) \approx \frac{\Omega}{2\omega} u_0 \cos 2\omega t - \frac{\Omega}{2\omega} v_0 \sin 2\omega t. \tag{14}$$

Подставляя это выражение в первые два уравнения системы (12), после усреднения по быстрым осцилляциям поля получаем

$$\dot{u} = -\left(\Delta + \frac{\Omega^2}{4\omega}\right)v, \quad \dot{v} = \left(\Delta + \frac{\Omega^2}{4\omega}\right)u + \Omega w. \tag{15}$$

Из сравнения с системой (8) видно, что учет влияния быстро осциллирующих членов эквивалентен **увеличению** расстройки на величину δ,

$$\delta = \frac{\Omega^2}{4\omega}, \tag{16}$$

которая называется *сдвигом Блоха - Зигерта*.

★ В стандартных условиях сдвиг Блоха - Зигерта $\delta = 1.73 \cdot 10^8\ \text{c}^{-1}$ примерно в 6400 раз **меньше** частоты Раби.

§ 11.3 Рассеяние на двухуровневой системе: простейшая модель

◆ Если матричный элемент дипольного момента между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ действителен, $\vec{d}_2 = 0$, то зависимость дипольного момента двухуровневой системы от времени пропорциональна компоненте P вектора Блоха. Выражая P через компоненты u и v во вращающейся системе координат, имеем

$$P = u\cos\omega t - v\sin\omega t. \tag{17}$$

Используем найденное выше решение (11), соответствующее начальным условиям, в которых до начала действия поля система находилась в основном состоянии. Элементарные расчеты дают

$$P = -\frac{\Delta\Omega}{\Omega_+^2}\cos\omega t + \Omega\frac{\Omega_+ + \Delta}{2\Omega_+^2}\cos(\omega + \Omega_+)t - \Omega\frac{\Omega_+ - \Delta}{2\Omega_+^2}\cos(\omega - \Omega_+)t. \tag{18}$$

> Под действием гармонического поля двухуровневая система излучает как на частоте внешнего поля ω, так и на боковых частотах $\omega \pm \Omega_+$, где $\Omega_+ = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ есть частота осцилляций компонент вектора Блоха во вращающейся системе координат.

Пренебрегая малыми величинами порядка Δ/ω и Ω/ω, получим выражение для полной мощности излучения:

$$\mathbf{P} = \frac{2 < \ddot{\vec{d}}^2 >}{3c^3} \approx \frac{\vec{d}^2\omega^4}{6c^3}. \tag{19}$$

Соответствующее сечение рассеяния дается выражением

$$\boxed{\sigma = \frac{\mathbf{P}}{I} = \frac{\vec{d}^2\omega^4}{6Ic^3}} \qquad (20)$$

★ Для стандартного двухуровневого атома $(d_s = ea_0)$ с резонансом на стандартной частоте $(\omega = \omega_s)$ сечение рассеяния в стандартных условиях $\sigma_{2s} = 3.91\cdot 10^{-22}\ \text{см}^2$. Оно примерно в 600 раз **больше** сечения нерезонансного рассеяния (см. §5.1).

> Мощность излучения, рассеиваемого двухуровневой системой в гармоническом квазирезонансном поле, почти **не зависит** от амплитуды действующего на систему поля, а сечение рассеяния **убывает** обратно пропорционально интенсивности действующего на систему излучения.

☆ Найти зависимость мощности излучения двухуровневой системы в гармоническом поле от расстройки Δ и амплитуды поля $\sim \Omega$ в резонансном случае $(\Delta << \Omega)$ в первых неисчезающих порядках по Δ/ω и Ω/ω.

§ 11.А Интерлюдия

А вы видели хоть один [атом]?
Эрнст Мах

✧ **Р★** Одиночный атом с резонансной частотой $\omega_{21} = 2\omega_s$ и матричным элементом перехода $d_{21} = ea_0$, находящийся в ловушке, облучается резонансным монохроматическим светом.

Звездой какой величины будет казаться этот атом наблюдателю с расстояния $R = 10$ см?

◆ Применимость выражения (20) ограничена со стороны **слабых** полей. Такое ограничение связано с тем, что при построении модели не была учтено *спонтанное излучение* системы, находящейся в возбужденном состоянии. Пренебрежение этим процессом оправдано, если частота Раби Ω велика по сравнению со скоростью спонтанного излучения

$$\Gamma_s = \frac{2\vec{d}^2\omega^3}{\hbar c^3}. \qquad (21)$$

Приравнивая Ω и Γ_s, находим **нижнюю** границу применимости выражения (20) по напряженности поля: $\mathcal{E}_- = 4d\omega^3/3c^3$. В стандартных условиях $\mathcal{E}_- = 6.95\cdot 10^{-4}$ Гс, что соответствует интенсивности $I_- = 5.77\cdot 10^{-5}$ Вт см$^{-2}$. На нижней границе применимости сечение рассеяния излучения на двухуровневой системе **максимально** и равно

$$\sigma_{2-} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{c}{\omega}\right)^2. \qquad (22)$$

Как и следовало ожидать, оно (параметрически) равно квадрату длины волны излучения - **максимальной** величине сечения рассеяния волны на точечном объекте [ЛЛIII, §123, 133].

◆ Применимость выражения (20) ограничена со стороны **сильных** полей. Такое ограничение связано с тем, что при решении было использовано приближение вращающегося поля, предполагавшее малость параметра $\beta_+ = \Omega/\omega_{21}$. Приравнивая этот параметр единице, найдем **верхнюю** границу применимости выражения (20) по напряженности поля. В стандартных условиях она равна $\mathcal{E}_+ = 7.32\cdot 10^5$ Гс, что соответствует интенсивности $I_+ = 6.4\cdot 10^{13}$ Вт см$^{-2}$. На верхней границе применимости сечение рассеяния излучения на двухуровневой системе минимально и равно

$$\sigma_{2+} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{d^4\omega^2}{\hbar^2 c^4} = \frac{4\pi}{3}\alpha^4\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 a_0^2. \qquad (23)$$

Как и следовало ожидать, оно (параметрически) равно сечению нерезонансного рассеяния излучения на атоме - или, с точностью до частотного фактора, сечению рассеяния на свободном электроне [ЛЛII, §78].

§ 11.4 Рассеяние сильного поля на двухуровневой системе

◆ Рассчитанное в приближении вращающегося поля сечение рассеяния резонансного излучения на двухуровневой системе убывает с ростом интенсивности, достигая на верхней границе применимости приближения $(I \sim I_+)$ значения порядка сечения нерезонансного рассеяния. Рассмотрим процессы рассеяния в полях с интенсивностью $I >> I_+$. Поскольку $\Omega \geq \omega_{21}$, переход во вращающуюся систему координат нецелесообразен. Уравнения для исходных компонент вектора Блоха имеют вид

$$\frac{dP}{dt} = -\omega_{21}Q, \quad \frac{dQ}{dt} = \omega_{21}P - 2\Omega R\cos\omega t, \quad \frac{dR}{dt} = 2\Omega Q\cos\omega t. \qquad (24)$$

Если $\Omega >> \omega_{21}$, то в правых частях можно сохранить только члены, пропорциональные Ω. Остаются два уравнения,

$$\frac{dQ}{dt} = -2\Omega R\cos\omega t, \quad \frac{dR}{dt} = 2\Omega Q\cos\omega t, \qquad (25)$$

обладающие первым интегралом $J_1 = Q^2 + R^2 \cong 1$. Подстановка $Q = \sin\phi(t)$, $R = \cos\phi(t)$ приводит к одному уравнению первого порядка

$$\frac{d\phi}{dt} = -2\Omega\cos\omega t. \qquad (26)$$

Возьмем начальные условия $Q(0)=0$, $R(0)=1$. Тогда

$$Q(t) = \sin\left(\frac{2\Omega}{\omega}\sin\omega t\right), \quad R(t) = \cos\left(\frac{2\Omega}{\omega}\sin\omega t\right). \qquad (27)$$

☆ Исследовать условия применимости решения (27) и найти к нему первую поправку.

Периодическую функцию $Q(t)$ можно разложить в ряд Фурье. Коэффициенты фурье-разложения будут выражаться через функции Бесселя первого рода $J_m(z)$ с нечетными индексами m от аргумента $z = 2\Omega/\omega$:

$$Q(t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)\sin(2n+1)\omega t. \qquad (28)$$

★ Найденное решение содержит только **нечетные** гармоники частоты действующего поля, что связано со специальным выбором начальных условий. При начальных условиях общего вида в спектре $Q(t)$ будут присутствовать как нечетные, так и **четные** гармоники частоты действующего поля.

◆ Амплитуда дипольного момента системы определится из первого уравнения системы (24):

$$P(t) = 2\frac{\omega_{21}}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)\frac{\cos(2n+1)\omega t}{(2n+1)}. \qquad (29)$$

Средняя мощность излучения есть

$$\mathbf{P} = \frac{2d^2}{3c^3}\overline{\ddot{P}^2} = \frac{4d^2\omega_{21}^2\omega^2}{3c^3}\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}^2\left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)\cdot(2n+1)^2. \qquad (30)$$

Оценим входящую в выражение для мощности $\mathbf{P}$ сумму,

$$S_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}^2(z)\cdot(2n+1)^2, \qquad (31)$$

при больших значениях аргумента $(z >> 1)$. Асимптотики функций Бесселя имеют вид (32)

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (|z| >> 1, n), \qquad J_n(z) \approx \frac{z^n}{2^n n!} \quad (|z| \le 1).$$

Основной вклад в сумму дают слагаемые с $n \le z/2$. Используя в этой области первую асимптотику, получаем

$$S_u(z) \approx \frac{2}{\pi z}\sum_{n=0}^{z/2}(2n+1)^2 \approx \frac{z^2}{3\pi}. \qquad (33)$$

★ Полученная оценка дает для отношения $S_u(z)/z^2$ в пределе больших z постоянное значение $(3\pi)^{-1} = 0.106$. Численные расчеты дают для этой константы значение 0.125.

С учетом формулы (33) находим, что полная мощность излучения,

$$\mathbf{P} \approx \frac{16 d^2 \omega_{21}^2 \Omega^2}{9\pi c^3}, \tag{34}$$

растет пропорционально интенсивности действующего излучения. Сечение полного рассеяния сильного поля на двухуровневой системе, учитывающее все излучаемые гармоники,

$$\sigma \approx \frac{128}{9} \alpha^4 a_0^2 \left(\frac{\omega_{21}}{\omega_a} \right)^2, \tag{35}$$

не зависит от интенсивности и имеет приблизительно ту же величину, что и сечение нерезонансного рассеяния.

EOL ☯