ЛЕКЦИЯ #30
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ - 7

◆ Выше рассматривались, в основном, те процессы, которые в принципе могли происходить и при вакуумном начальном состоянии поля. Перейдем к рассмотрению другого класса - процессов *рассеяния:* переходов, при которых исчезает один фотон моды λ_1 и испускается фотон моды λ_2. Поскольку при рассеянии изменяются состояния двух мод поля, то описание такого процесса требует, как минимум, описания процессов во втором порядке теории возмущений по оператору $\hat{V}_1$ и/или в первом порядке по оператору $\hat{V}_2$.

§ 30.1 Рассеяние света на свете в вакууме

◆ Простейшим в физическом смысле является процесс рассеяния света на свете в вакууме. Оценим величину сечения этого процесса, построив феноменологический оператор $\hat{V}_\gamma$ взаимодействия низкочастотных ($\hbar\omega \ll mc^2$) фотонов. В квантовой теории характерный масштаб напряженности поля, ограничивающий применимость линейных уравнений поля в вакууме, равен

$$\mathcal{E}_{NL} = \frac{m^2c^3}{e\hbar} = 4.44\cdot 10^{13}\ \text{Гс}. \tag{1}$$

Он называется *швингеровским полем*. В поле такой напряженности работа по перемещению электрона на расстояние, равное комптоновской длине волны $\lambdabar_c = \hbar/mc$, сравнима с пороговой энергией рождения электрон-позитронной пары:

$$A = e\mathcal{E}_{NL}\lambdabar_c = mc^2. \tag{2}$$

Структура оператора взаимодействия фотонов $\hat{V}_\gamma$ определяется следующими соображениями.

① Оператор $\hat{V}_\gamma$ должен иметь размерность плотности энергии - как и оператор плотности энергии свободного электромагнитного поля (см. §24.3).

② Оператор $\hat{V}_\gamma$ должен быть скаляром, поэтому он может зависеть только от функций $\vec{H}^2$, $\vec{E}^2$ и $\left(\vec{E}\vec{H}\right)^2$.

③ Взаимодействие фотонов возникает в результате редукции взаимодействия электромагнитного поля и виртуальных электронпозитронных пар. Поэтому заряд электрона e и напряженности полей должны входить в $\hat{V}_\gamma$ в одинаковых степенях.

④ При изменении знака заряда электрона физическая картина мира останется неизменной. Поэтому масштаб нелинейности $\mathcal{E}_{NL}$ должен входить в $\hat{V}_\gamma$ в четной степени.

Предполагая, что оператор $\hat{V}_\gamma$ обладает минимальной нелинейностью - пропорционален четвертой степени поля, для типичного члена получаем оценку

$$\hat{V}_\gamma \sim \alpha \frac{\mathcal{E}^4}{\mathcal{E}_{NL}^2}. \tag{3}$$

Матричный элемент этого оператора, соответствующий процессу рассеяния фотона на фотоне, имеет порядок величины

$$V_\gamma \sim \alpha \left(\frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}_{NL}} \right)^2. \tag{4}$$

Для вычисления скорости переходов используем золотое правило Ферми. Поскольку состояние одного из конечных фотонов однозначно определяет состояние другого (в силу законов сохранения энергии и импульса), плотность конечных состояния равна плотности состояний для одного фотона. В итоге для полного сечения рассеяния фотона на фотоне получаем оценку

$$\sigma_\gamma \sim \alpha^{18} a_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_a} \right)^6. \tag{5}$$

★ При точном расчете (H. Euler, 1936) в выражение для сечения входит числовая константа $\# = 0.062$. На стандартной частоте сечение рассеяния фотона на фотоне имеет величину $\sigma_\gamma = 1.45 \cdot 10^{-65}$ см^2. При пересечении двух предельно сфокусированных (объем фокальной области $V \approx \lambda^3$) импульсов фемтосекундных ($\tau \approx 10^{-14}$ с) лазеров с интенсивностью $I \approx 10^{18}$ Вт см$^{-2}$ вероятность рассеяния пары фотонов за один импульс $W \sim 10^{-28}$.

★ Можно подумать, что рождение пар нейтрино – антинейтрино и их последующая аннигиляция дадут существенный вклад в рассеяние света на свете (так как масса нейтрино очень мала или равна нулю). Однако это не так: процесс $\gamma\gamma \to \nu\bar{\nu}$ сильно запрещен; для квантов стандартной частоты сечение имеет величину $\sigma = 2.74 \cdot 10^{-103}$ $см^2$ [DR93].

📖 [DR93] D.A. Dicus and W.W. Repko
Photon neutrino scattering
Phys. Rev. D, 1993, vol. 48, no. 11, pp. 5106 – 5108.

§ 30.2 Рассеяние света на электроне

◆ До сих пор задача о квантовом описании процесса рассеяния света на свободном электроне оставалась за пределами возможностей наших методов (например, квазиэнергетическая ВФ электрона в однородном переменном поле, найденная в §20.4, приводила к нулевому сечению рассеяния в противоречии как с классической теорией [ЛЛII, §72], так и с экспериментом). Рассмотрим эту задачу с использованием квантовой модели поля. Начальное и конечное состояния электрона будем описывать плоскими волнами:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp i\frac{\vec{p}_1\vec{r}}{\hbar}, \qquad \psi_k = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp i\frac{\vec{p}_2\vec{r}}{\hbar}. \tag{4}$$

Оператор взаимодействия возьмем в pA-калибровке. Удобно проводить рассмотрение в системе координат, в которой в начальный момент электрон покоится: $\vec{p}_1 = 0$. В этой системе матричные элементы оператора $\hat{V}_1$ обратятся в ноль, и процесс будет определяться матричным элементом оператора

$$\hat{V}_2 = \frac{e^2}{2mc^2}\hat{\vec{A}}^2 \tag{5}$$

Матричный элемент перехода из состояния с одним фотоном в моде $(\vec{k}_1,\vec{e}_1)$ в состояние с одним фотоном в моде $(\vec{k}_2,\vec{e}_2)$ есть

$$V_{kn} = \frac{e^2u^2}{mc^2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\left(\vec{e}_1\vec{e}_2\right)\int_{L^3}\frac{1}{L^3}\exp i\left(\vec{k}_1 - \frac{\vec{p}_2}{\hbar} - \vec{k}_2\right)\vec{r}d\vec{r}\,. \tag{6}$$

Это выражение отлично от нуля только при выполнении закона сохранения импульса: $\hbar\vec{k}_1 + \vec{p}_1(=0) = \hbar\vec{k}_2 + \vec{p}_2$. При выполнении такого равенства матричный элемент принимает вид

$$V_{kn} = \frac{2\pi\hbar e^2}{m\sqrt{\omega_1\omega_2}}\left(\vec{e}_1\vec{e}_2\right)\frac{1}{L^3}. \tag{7}$$

В силу закона сохранения импульса конечное состояние системы полностью определяется заданием моды $(\vec{k}_2,\vec{e}_2)$ конечного фотона. Поскольку переданная электрону при рассеянии энергия,

$$\Delta E \sim \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2\frac{1}{2m}, \tag{8}$$

мала в сравнении с энергией оптического фотона, $\Delta E/\hbar\omega \sim \hbar\omega/mc^2 \sim 10^{-6}$, то в низшем приближении можно считать рассеяние упругим ($\omega_1 = \omega_2$). Используя золотое правило Ферми и взяв в качестве $\rho(E)$ плотность конечных состояний фотона, получаем для сечения рассеяния света на свободном электроне выражение

$$\boxed{d\sigma\left(\vec{k}_2\right) = \alpha^4 a_0^2 \left(\vec{e}_1\vec{e}_2\right)^2 d\Omega}, \tag{9}$$

совпадающее с классическим (томсоновским) выражением. Квантовые поправки к этому выражению имеют порядок $\sim \hbar\omega/mc^2$ и уменьшают сечение.

§ 30.3 Давление света на электрон

◆ Квантовая теория дает легкий способ расчета силы светового давления на свободный электрон. При упругом рассеянии фотона на угол θ электрону передается импульс

$$\Delta p_x = \frac{\hbar\omega}{c}(1-\cos\theta) \tag{10}$$

Отсюда средняя сила светового давления

$$\vec{f}_{rp} = r_0^2 \frac{I}{\hbar\omega}\vec{n}\cdot\frac{\hbar\omega}{c}\int(1-\cos\theta)\cos^2\theta d\Omega = \vec{n}\frac{4\pi}{3}r_0^2\frac{I}{c} \tag{11}$$

★ В стандартных условиях $f_s = 1.1\cdot10^{-20}$ дин, что соответствует ускорению электрона $a_s = 1.2\cdot10^7$ см с$^{-2}$. За время действия лазерного импульса $\tau_s = 10^{-8}$ с электрон приобретет среднюю скорость $v_s = 0.12$ см с$^{-1}$.

☆ Задача. Какую скорость приобретет электрон в результате рассеяния одного фотона? Сравнить и согласовать с приведенным выше значением.

◆ Формула (11) не содержит постоянной Планка и потому может быть получена и в классической теории. В поле плоской электромагнитной волны ($\vec{E} = E_z\sin(kx-\omega t)$, $\vec{H} = H_y\sin(kx-\omega t)$, $\vec{S} = S_x$) в дипольном приближении на частицу в направлении распространения волны действует компонента силы Лоренца

$$f_L = \frac{ev}{c}H_y = \frac{e^2}{m\omega c}E_z H_y \sin 2\omega t, \tag{12}$$

среднее значение которой равно нулю. Для того, чтобы поток энергии между частями системы (полем и зарядом) был однонаправленным, нужно учесть диссипацию - *радиационное трение* [ЛЛII, §75]. Уравнение движения для x - компоненты координаты примет вид

$$m\ddot{x}+\frac{2e^2\omega^2}{3c^3}\dot{x}=e\mathcal{E}\sin\omega t, \tag{13}$$

откуда находится величина сдвига фаз между колебаниями координаты (и скорости) электрона и колебаниями электрического поля:

$$\varphi_r \sim \frac{e^2\omega}{mc^3}\approx 1.6\cdot 10^{-8}. \tag{14}$$

Отсюда получается оценка силы светового давления:

$$f_{rp}\sim f_L\varphi_r \sim \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{I}{c}\approx \sigma_T\frac{I}{c}. \tag{15}$$

> В классической электродинамике сила радиационного давления появляется как среднее значение силы Лоренца в направлении распространении волны, найденное с учетом сдвига фаз из-за радиационного трения. Выражение для силы радиационного давления совпадает с результатом квантовой теории.

★ Максимальная величина сечения рассеяния света на атоме $\sigma_+ \sim \lambda^2$, где λ - длина волны света (§ 12.1). В стандартных условиях эта величина на 18 порядков больше сечения рассеяния света на свободном электроне. Простейшая оценка для резонансного рассеяния света на атоме дает $v_s \sim 100c$, что явно указывает на возможность ускорения до релятивистских скоростей. Почему в действительности это не происходит?

§ 30.4 Рассеяние света на атоме

☆ Задача. Оценить отношение нерезонансных сечений рамановского $(\omega_2 \neq \omega_1)$ и рэлеевского $(\omega_2 = \omega_1)$ рассеяния света на атоме.

◆ При рассмотрении процессов рассеяния света на свободном электроне в §30.2 мы пользовались pA-калибровкой поля и специальным выбором системы отсчета. При рассмотрении рассеяния света на атоме надо иметь в виду, что матричные элементы однофотонных переходов между заданными состояниями в pA - калибровке и в dE - калибровке различны: используя соотношение $p_{nk}=im\omega_{nk}x_{nk}$, доказанное в §5.2, получаем

$$V_{mn}^{pA}=\frac{\omega_{kn}}{\omega_\lambda}V_{mn}^{dE}. \tag{16}$$

Однако при одновременном учете процессов второго порядка по одноквантовому возмущению V_1 и первого порядка по V_2 (в pA-калибровке) оба подхода эквивалентны, если модель атомной системы удовлетворяет правилам сумм (§ 6.1). Для модели двухуровневой системы (§ 10.1) такой эквивалентности в общем случае нет.

◆ Будем пользоваться dE - калибровкой. Процесс рассеяния описывается составным матричным элементом второго порядка

$$\widetilde{V}^{(2)} = 2\pi\sqrt{\omega_1\omega_2}\,\Sigma_{nk} \tag{17}$$

где

$$\Sigma_{nk} = \sum_i \left[\frac{\left(\vec{d}_{ki}\vec{e}_2\right)\left(\vec{d}_{in}\vec{e}_1\right)}{\omega_{in} - \omega_1} + \frac{\left(\vec{d}_{ki}\vec{e}_1\right)\left(\vec{d}_{in}\vec{e}_2\right)}{\omega_{ik} + \omega_1} \right] \tag{18}$$

Плотность конечных состояний должна быть взята для одного испущенного фотона ω_2. В итоге ЗПФ приводит к формуле для сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{\omega_1\omega_2^3}{\hbar^2 c^4}\left|\Sigma_{nk}\right|^2 d\Omega_2 \tag{19}$$

Зависимость от векторов поляризации падающего и рассеянного фотонов удобно выделить, введя тензор рассеяния $\hat{\chi}_{kn}$:

$$d\sigma = \frac{\omega_1\omega_2^3}{c^4}\left|(\chi_{kn})_{\alpha\beta}\, e_{2\alpha}e_{1\beta}\right|^2 d\Omega_2, \tag{20}$$

$$\left(\hat{\chi}_{kn}\right)_{\alpha\beta} = -\frac{e^2}{\hbar}\sum_i \left[\frac{(r_\alpha)_{ki}(r_\beta)_{in}}{\omega_{in} - \omega_1} + \frac{(r_\beta)_{ki}(r_\alpha)_{in}}{\omega_{ik} + \omega_1} \right] \tag{21}$$

Для рэлеевского рассеяния ($k = n$) он совпадает с тензором рассеяния, найденным в полуклассической теории (§5.1).

★ Почему полуклассическая и квантовая модели поля, приводя к одинаковым результатам для упругого рассеяния, дают качественно различные результаты для рассеяния неупругого (в полуклассической теории спектр излучения в низшем порядке содержит только частоту внешнего поля)?

◆ Изложим еще один подход к теории рассеяния. Мы можем описывать поле падающей на систему волны классической моделью, а поле, излучаемое системой - квантовой. В первом порядке теории возмущений по внешнему полю амплитуда вероятности возбужденного состояния (§6.1)

$$a_i(t) = -\frac{\left(\vec{d}\vec{e}_1\right)_{in}\mathcal{E}}{2\hbar}\left[\frac{e^{i(\omega_{in}+\omega_1)t}}{\omega_{in} + \omega_1} + \frac{e^{i(\omega_{in}-\omega_1)t}}{\omega_{in} - \omega_1} \right]. \tag{22}$$

Рассматривая спонтанные переходы из возмущенного внешним полем состояния атома под действием однофотонного оператора излучения

$$\hat{V}^+ = -i\frac{u}{c}\hat{\vec{d}}\sum_\lambda \vec{e}_\lambda\sqrt{\omega_\lambda}\,\hat{a}_\lambda^+ e^{i\omega_\lambda t}, \tag{23}$$

(см. §24.2) и учитывая, что частота испущенного фотона ω_2 должна быть положительна, для сечения рассеяния получаем

$$d\sigma = \frac{\omega_1 \omega_2^3}{\hbar^2 c^4} \left| \widetilde{\Sigma}_{nk} \right|^2 d\Omega_2 \tag{24}$$

где часть матричного элемента, включающая суммирование по промежуточным состояниям, имеет вид

$$\widetilde{\Sigma}_{nk} = \sum_i \left[\frac{\left(\vec{d}_{ki}\vec{e}_2\right)\left(\vec{d}_{in}\vec{e}_1\right)}{\omega_{in} - \omega_1} \right] \tag{25}$$

Это выражение отличается от формулы (20), но имеет близкие значения, если в скобках в (20) доминирует первое слагаемое. Таким образом, с оговорками процесс рассеяния можно интерпретировать как процесс спонтанного излучения из состояний, возмущенных внешним полем.

★ На основании "принципа соответствия" можно ожидать, что полностью квантовый и полуклассический по падающему полю подходы должны давать одинаковые результаты для случая достаточно сильной внешней волны. Каким образом восстанавливается такая эквивалентность?

§ 30.5 Нелинейное рассеяние на свободном электроне

◆ Рассмотрим процесс нелинейного рассеяния фотонов на электроне, при котором из монохроматической волны с интенсивностью I поглощаются два кванта частоты ω и испускается (спонтанно) один квант частоты 2ω. Как и в § 30.2, рассмотрим рассеяние на покоящемся электроне. Тогда процесс будет описываться составным матричным элементом вида

$$\widetilde{V}^{(2)} = \frac{e^3}{2m^2c^3} \langle k | \vec{p}\vec{A} | i \rangle \frac{1}{\hbar\omega} \langle i | \vec{A}^2 | n \rangle. \tag{26}$$

По порядку величины

$$\widetilde{V}^{(2)} \approx \frac{e^3 \hbar^{3/2}}{m^2 c^3 \omega^{3/2}} n_\lambda, \tag{27}$$

где $n_\lambda = I/c\hbar\omega$ - концентрация фотонов. Из золотого правила Ферми получаем оценку сечения

$$\sigma \sim \frac{e^6}{m^4 c^7 \omega^2} I. \tag{28}$$

Это выражение не содержит постоянной Планка и потому может быть получено из классической теории. Движение электрона в поле электромагнитной волны в низшем приближении можно представить как гармонические колебания вдоль вектора электрического поля с законом движения

$$z = \frac{e\mathcal{E}}{m\omega^2}\cos\omega t \tag{29}$$

При этом квадрупольный момент системы $D \sim e r_\alpha r_\beta$ будет меняться на удвоенной частоте, приводя к излучению второй гармоники. Используя известное выражение для мощности квадрупольного излучения $P \sim c^{-5}\dddot{D}^2$ (см. §24.3) получаем для сечения то же выражение (28). К дипольному излучению на частоте второй гармоники приводит учет магнитного поля (см. формулу (12)); оно имеет тот же порядок величины.

★ Сечение (28) можно записать в виде $\sigma \sim r_0^2 (I/I_2)$, где $I_2 = m^2c^3\omega^2e^{-2}$. В стандартных условиях $I_2 = 3.0 \cdot 10^{19}$ Вт см$^{-2}$, и сечение нелинейного рассеяния, определяющего скорость генерации второй гармоники на свободных электронах, на 11 порядков меньше сечения упругого рассеяния (и без того малого).

☆ Задача. Вычислить амплитуду колебаний скорости электрона v_f в поле волны с интенсивностью I_2.

§ 30.6 Электрон в поле стоячей волны

◆ Рассмотрим в рамках классической модели движение электрона в поле стоячей световой волны. Зададим поле векторным потенциалом

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{n}_y \frac{c\mathcal{E}}{\omega}\cos kx \cos\omega t\,. \tag{30}$$

Гамильтониан задачи (ср. §2.2) имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \vec{n}_y \frac{e\mathcal{E}}{\omega}\cos kx\cos\omega t\right)^2. \tag{31}$$

Поскольку гамильтониан содержит только координату x, компоненты импульса p_y и p_z являются интегралами движения. Положим $p_y = p_z = 0$. Тогда приходим к гамильтониану одномерного движения

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\cos^2 kx\cos^2\omega t\,. \tag{32}$$

Средний по времени потенциал

$$U(x) = \frac{e^2\mathcal{E}^2}{4m\omega^2}\cos^2 kx \tag{33}$$

может также рассматриваться как средняя локальная кинетическая энергия электрона, [ЛЛI, §30]. Узлы электрического поля являются устойчивыми состояния равновесия для медленных движений электрона, частота малых колебаний вокруг которых

$$\Omega = \frac{e\mathcal{E}}{mc}. \tag{34}$$

(электрический аналог циклотронной частоты).

★ В стандартных условиях эта частота $\Omega = 1.6 \cdot 10^{10}\ \text{с}^{-1}$ мала в сравнении с частотой поля, что оправдывает использование метода усреднения.

☆ Задача. Оценить величину борновского параметра для потенциала (33) в стандартных условиях.

EOL ☯

КОНЕЦ ЛЕКЦИЙ ОСЕННЕГО СЕМЕСТРА