ЛЕКЦИЯ #14
СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР - 2

§14.1 Квантовый нелинейный осциллятор в гармоническом поле: динамическое туннелирование

◆ Автономной гамильтоновой системе, введенной в §13.4 для описания движения вблизи нелинейного резонанса, может быть сопоставлена квантовая модель - заменой q и p на канонические операторы,

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar. \tag{1}$$

★ Такая замена приближенна: из исходных динамических уравнений следует, что $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar + \hbar O(\Delta, q^2, p^2)$. В области применимости уравнений, полученных методом ММА, поправки малы.

Бистабильность системы (13.34,35) - наличие двух фазовых траекторий с одной энергией при $V(s) \le \Lambda \le V(d)$ - в квантовом случае исчезает ввиду возможности *динамического туннелирования* системы из одной области в другую. В квантовом случае состояние, локализованное вблизи "u", устойчиво, а состояние, локализованное вблизи "d", неустойчиво.

★ Концепция динамического туннелирования введена в работе Хеллера и Дэвиса [HD81]. Их определение таково:

> kind" of tunneling, namely, dynamical tunneling. Dynamical tunneling is simply a classically forbidden process which does not happen to involve an energetically insurmountable potential barrier. Many examples are known

📖 [HD81] E.C. Heller and M.J. Davis
Quantum Dynamical Tunneling in Large Molecules. A Plausible Conjecture
J. Phys. Chem., 1981, v. 85, no. 4, pp. 307 – 309.

◆ Оценим матричный элемент перехода из состояния d в окрестность состояния u методом ВКБ (ср. [ЛЛIII, §50, задача 3]). Положим

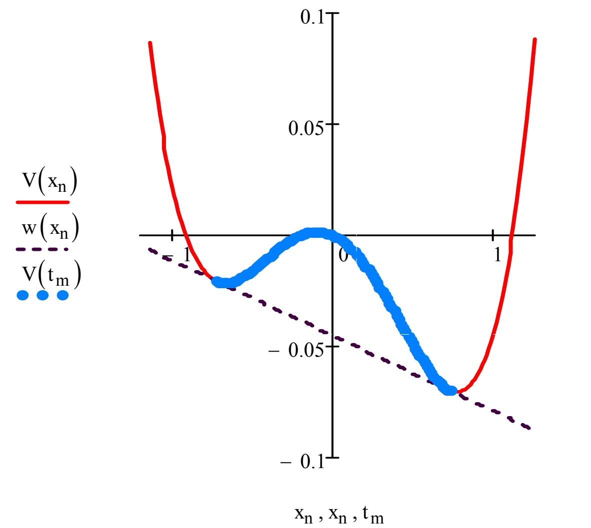
$$\psi(q) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int p\,dq\right). \tag{2}$$

В отличие от обычного УШ, из-за наличия в гамильтониане Λ (13.36) членов четвертого порядка по p в задаче присутствуют две ветви квадрата импульса:

$$p_{\pm}^2 = \frac{8\Delta}{3} - q^2 \pm \frac{4}{3}\sqrt{4\Delta^2 + 3Fq + 3\omega\Lambda}\,. \tag{3}$$

Точки поворота определяются соотношением $p^2(q)=0$ и лежат на кривой $\Lambda=V(q)$, Обе ветви квадрата импульса совпадают на прямой, заданной уравнением

$$\Lambda=-\frac{4\Delta^2}{3\omega}-\frac{Fq}{\omega}. \tag{4}$$



Сплошная линия – потенциал $V(q)$, заданный формулой (13.38). Утолщением линии выделена область, где эффективная масса частицы отрицательна. Штриховая линия - прямая (4), определяющая положение точек совпадения ветвей квадрата импульса. Параметры: $\Delta=0.2$, $F=0.04$.

Эта прямая касается кривой $V(q)$ в точках с абсциссами q_- и q_+. Внутри интервала (q_-,q_+) лежат точки поворота ветви p_-, а вне него - ветви p_+.

◆ Скорость перехода между состояниями d и u определяется, в основном, квазиклассическим выражением для подбарьерного движения:

$$M\sim\exp(-S/\hbar), \tag{5}$$

где “подбарьерное действие” S определяется выражением

$$S=\int_c^a|p_-(q)|dq-\int_c^b|p_+(q)|dq. \tag{6}$$

Здесь a есть координата состояния d (двойная точка поворота ветви p_-), b - точка поворота ветви p_+ при энергии $\Lambda=\Lambda(d)$, c - координата точки равенства импульсов на двух ветвях p_+ при энергии $\Lambda=\Lambda(d)$. Асимптотика S при $F\to 0$ имеет вид

$$S\approx\frac{8\Delta}{3}\ln\left(\frac{4\Delta^2}{3F}\right). \tag{7}$$

Экспонента приобретает вид

$$e^{-S/\hbar} \approx \left(\frac{3F}{4\Delta^2}\right)^{2\frac{4\Delta}{3\hbar}}. \qquad (8)$$

Она зависит от силы F, пропорциональной напряженности поля $\mathcal{E}$, степенным образом: $W \sim F^{2N}$, где величина

$$N = \frac{4\Delta}{3\hbar}. \qquad (9)$$

в квазиклассическом случае велика. Учитывая, что энергия состояния u, в котором частота перехода между соседними уровнями близка к частоте поля, есть $E_u \approx 4\Delta/3$, видим, что N есть число квантов, необходимых для перехода в состояние u. Квазиклассический расчет приводит к выводу о пропорциональности скорости динамического туннелирования между состоянием с малой амплитудой d и состоянием с большой амплитудой u интенсивности поля в степени, равной числу поглощаемых при переходе квантов. К такому же результату приведет и расчет по теории возмущений: скорость N-фотонного перехода пропорциональна F^{2N} (см. §9.1).

★ **Пример.** Возьмем типичные для моделей молекулярных колебаний значения $m = 10^{-22}\,г$, $\omega_0 = 6.3 \cdot 10^{13}\,c^{-1}$ и $\lambda^{-1/2} = 2.0 \cdot 10^{-8}\,см$. В этих единицах постоянная Планка $\hbar = 4.18 \cdot 10^{-4}$. При расстройке $\Delta = 0.2 \ll 1$ состоянию u будет соответствовать уровень с номером $N = 636 \gg 1$. При малой возмущающей силе $F = 0.04 \ll \Delta$ численный расчет интеграла дает для величины $S/\hbar$ значение $1165 \gg 1$. Какую характерную частоту ставить при экспоненте $\exp(-S/\hbar)$, уже неважно – практически величина скорости перехода есть ноль. Выбранное значение силы соответствует напряженности поля излучения $\mathcal{E} \approx 6.6 \cdot 10^5\,Гс$ и его интенсивности $I \approx 5.2 \cdot 10^{13}$ $Вт\,см^{-2}$.

> Хотя в строгом смысле состояние нелинейного осциллятора d с малой амплитудой вынужденных колебаний в квантовом случае неустойчиво, но его время жизни даже в очень сильных полях на много порядков больше типичной длительности лазерного импульса.

§14.2 Квантовый нелинейный осциллятор в гармоническом поле: квазиэнергетические состояния и квантовый нелинейный резонанс

◆ *Квантовым нелинейным резонансом* (КНР) называется явление, возникающее в слабо нелинейных системах под действием внешнего поля, гармонически зависящего от времени. Оно состоит в возникновении квазиэнергетических состояний, составленных из многих стационарных состояний системы из области спектра, в которой частоты переходов между соседними состояниями (или, что то же самое, частоты классического движения) близки к частоте внешнего поля. Такое явление было впервые рассмотрено Берманом и Заславским [BZ77]

[BZ77] Berman G.P., Zaslavsky G.M.
Theory of quantum nonlinear resonance
Phys. Lett. A, 1977, vol. 61, no. 5, pp. 295 – 296.

с помощью модели с гамильтонианом вида

$$\hat{H} = \hat{H}_0\left(\hat{p}, \hat{x}\right) - F\hat{x}\cos\omega t, \qquad (10)$$

описывающим воздействие гармонического поля на автономную систему с одной степенью свободы. В дальнейшем амплитуду силы F будем называть полем.

◆ В стандартной модели для описания КНР приняты три упрощающих предположения.

① Во-первых, энергетический спектр невозмущенной системы описывается квадратичным выражением

$$E_n = \hbar\varepsilon_n = \hbar\omega_0\left(n - \frac{\kappa}{2}n^2\right), \qquad (11)\equiv(13.24)$$

где $\kappa \ll 1$ - безразмерный коэффициент нелинейности.

② Во-вторых, матричные элементы оператора координаты $\hat{x}$ считаются отличными от нуля только для переходов между соседними уровнями:

$$x_{n,k} \propto \delta\left(k, n+1\right) + \delta\left(k, n-1\right) \qquad (12)$$

Тем самым устраняются матричные элементы, ответственные за генерацию высших гармоник.

③ В-третьих, матричные элементы считаются постоянными

$$x_{n,k} = X\left[\delta\left(k, n+1\right) + \delta\left(k, n-1\right)\right] \qquad (13)$$

(так же, как предполагалось в § 13.3 при рассмотрении задачи о гармоническом осцилляторе во внешнем резонансном поле).

Основные параметры модели удобно привести к форме частот. Первым является «первая расстройка» $\Delta = \kappa\omega_0$, представляющая собой разность частот двух соседних переходов, вторым является частота Раби $\Omega = FX/\hbar$, а третьим – частота поля ω. Считая невозмущенную систему квазиклассической, мы будем всегда полагать $\Delta \ll \omega$. Частота Раби Ω может принимать произвольные значения.

◆ Нестационарное УШ

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left(\hat{H}_0-F\hat{x}\cos\omega t\right)\Psi \tag{14}$$

подстановкой разложения Ψ по базису стационарных состояний

$$\Psi=\sum c_n(t)\varphi_n(x)\exp(-i\varepsilon_n t) \tag{15}$$

сводится к системе уравнений для амплитуд $c_n(t)$

$$\begin{aligned} i\dot{c}_n=&-\frac{\Omega}{2}\left[e^{i(\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n-\omega)t}+e^{i(\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n+\omega)t}\right]c_{n+1}-\\ &-\frac{\Omega}{2}\left[e^{i(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n-\omega)t}+e^{i(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n+\omega)t}\right]c_{n-1}\end{aligned} \tag{16}$$

Определим резонансный уровень r (номер которого не обязательно целый!) как такой, для которого формальная частота перехода

$$\omega_t(n)=\hbar^{-1}\frac{dE_n}{dn}=\omega_0(1-\kappa n) \tag{17}$$

равна частоте внешнего поля:

$$\omega_0(1-\kappa r)=\omega\,. \tag{18}$$

Положим теперь $n=r+q$: переменная q указывает номер уровня, отсчитанный от резонансного. Для величин, входящих в показатели экспонент, получаем

$$\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n=\omega-\Delta q-\frac{\Delta}{2}, \tag{19}$$

$$\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n=-\omega+\Delta q-\frac{\Delta}{2}. \tag{20}$$

Подстановкой

$$c_q=a_q\exp\left(i\Delta\frac{q^2}{2}t\right) \tag{21}$$

система уравнений для амплитуд сводится к виду

$$i\frac{da_q}{dt}=\Delta\frac{q^2}{2}a_q-\frac{\Omega}{2}\left(1+e^{-2i\omega t}\right)a_{q+1}-\frac{\Omega}{2}\left(1+e^{2i\omega t}\right)a_{q-1} \tag{22}$$

Если $\Omega\ll\Delta$, то в резонансе может находиться только один переход, и модель эквивалентна двухуровневой системе (§ 10.1). Если $\Delta\ll\Omega\ll\omega$, то оправдано приближение вращающегося поля, и экспонентами с частотой поля в (22) можно пренебречь. Система уравнений приобретает вид

$$i\frac{da_q}{dt} = \Delta\frac{q^2}{2}a_q - \frac{\Omega}{2}a_{q+1} - \frac{\Omega}{2}a_{q-1}. \tag{23}$$

Ее можно интерпретировать как систему уравнений для амплитуд в одномерной цепочке со взаимодействием ближайших соседей и энергией, квадратично зависящей от номера узла.

◆ Считая зависимость $a(q)$ плавной, можно континуализовать уравнения (23) (ср. § 7.3), считая q непрерывной переменной, разложив $a(q\pm 1)$ в ряд Тейлора и ограничившись первыми тремя членами:

$$a(q\pm 1) \approx a(q) \pm \frac{\partial a(q)}{\partial q} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 a(q)}{\partial q^2}. \tag{24}$$

В результате приходим к уравнению для функции $a(q,t)$:

$$i\hbar\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\hbar\Omega}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial q^2} + \hbar\Delta\frac{q^2}{2}a - \hbar\Omega a. \tag{25}$$

Его можно интерпретировать как нестационарное УШ для гармонического осциллятора. Роль независимой переменной теперь играет отклонение q по номеру уровня стационарного состояния от резонансного; мы будем называть модель (25) *энергетическим осциллятором*. Параметры этой модели можно интерпретировать в терминах обычного гармонического осциллятора с массой $\tilde{m}$ и собственной частотой $\tilde{\omega}$. Тогда

$$\frac{\hbar^2}{\tilde{m}} = \hbar\Omega, \quad \tilde{m}\tilde{\omega}^2 = \hbar\Delta. \tag{26}$$

Собственная частота колебаний энергетического осциллятора равна

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\Omega\Delta}. \tag{27}$$

Последний член в правой части (25) соответствует сдвигу начала отсчета энергии и не имеет значения.

◆ Стационарные состояния энергетического осциллятора (25) описывают квазиэнергетические состояния, образованные суперпозициями стационарных состояний $\varphi_n(x)$ исходного нелинейного осциллятора с номерами $n \approx r$, лежащими вблизи резонансного значения. Эти состояния называются *захваченными в квантовый нелинейный резонанс*. Они описываются функциями вида

$$a_m(q,t) = H_m(q)e^{-i\tilde{\omega}\left(m+\frac{1}{2}\right)t}, \tag{28}$$

где $H_m(q)$ - известные функции Эрмита. Основное состояние осциллятора соответствует $m=0$ и описывает квазиэнергетическое состояние с наименьшим числом уровней:

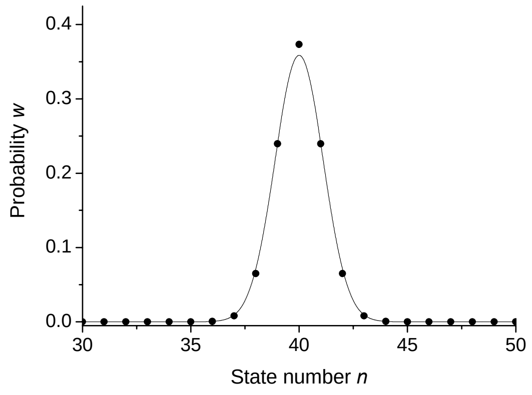
$$\Phi_0(q)=\pi^{-1/4}\beta^{-1/8}\exp\left(-\frac{q^2}{2\sqrt{\beta}}\right) \tag{29}$$

где $\beta=\Omega/\Delta\gg 1$. Величина β есть параметр нестационарной теории возмущений для перехода, соседнего с резонансным (см. (2.37)).

◆ Из (29) следует, что минимальное число состояний, захваченных в нелинейный резонанс, есть

$$\delta n_- \approx \beta^{1/4}. \tag{30}$$

Следует отметить, что решение (29) хорошо согласуется с численными расчетами даже при значениях β порядка всего лишь нескольких единиц.



Распределение вероятностей в пакете основного КЭС при $\beta=6.00$ (стандартное отклонение распределения вероятностей $\sigma=2^{-1/2}\beta^{1/4}=1.107$). Кривая - гауссова форма (29), точки – результат численного расчета.

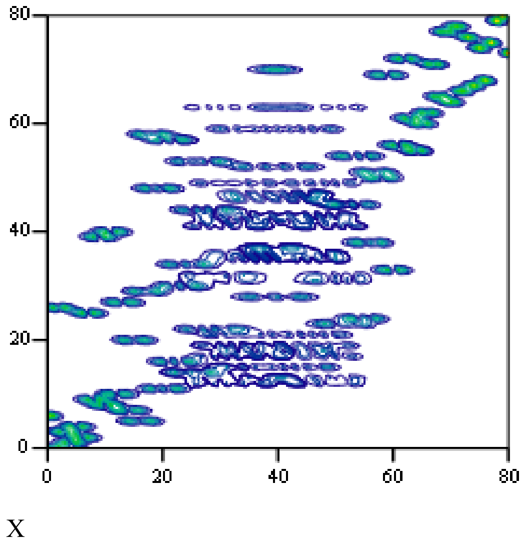
Оценим максимальное число состояний, которые могут быть захвачены в нелинейный резонанс. Из уравнения (23) можно оценить $\max q$ как значение, при котором величина потенциальной энергии сравняется с матричным элементом перехода, откуда максимальное число захваченных в резонанс состояний

$$\delta n_+ \approx \beta^{1/2} \tag{31}$$

Полное число КЭС, захваченных в нелинейный резонанс, можно оценить как отношение ширины зоны в цепочке (23) к энергии кванта эффективного осциллятора:

$$\mathcal{N} \approx \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}} \approx 2\beta^{1/2} \tag{32}$$

☆ Задача. Оценить среднее расстояние между нулями ВФ самого широкого из захваченных в КНР квазиэнергетических состояний.



Профили плотности вероятности квазиэнергетических состояний при $\beta = 60$. (резонансный уровень $r = 40$). Максимальная полуширина захваченного в КНР КЭС $\delta n_+ \approx 18$.

★ **Пример**. Для молекулярного осциллятора с $\omega_0 = 6.3 \cdot 10^{13}\ c^{-1}$ и $\kappa = 5 \cdot 10^{-3}$ величина «первой расстройки» $\Delta = \kappa\omega_0 = 3.15 \cdot 10^{11}\ c^{-1}$. При частоте внешнего поля $\omega = 0.9\omega_0$ резонансный уровень имеет номер $r = 20$. Матричный элемент перехода между соседними уровнями может быть взят из модели гармонического осциллятора: $X \approx \sqrt{\hbar/M\omega_0}\sqrt{r}$. При $M = 20m_p$ получаем $X = 3.17 \cdot 10^{-9}\ см$. В поле стандартной напряженности $\mathcal{E}_s = 915\ Гс$ частота Раби $\Omega = 1.32 \cdot 10^{12}\ c^{-1}$, и параметр теории возмущений $\beta = \Omega/\Delta = 4.18$. Частота колебаний в нелинейном резонансе (частота перехода между соседними квазиэнергетическими состояниями) при этих условиях $\tilde{\omega} = 6.48 \cdot 10^{11}\ c^{-1} = 0.01\omega_0$.

В квантовом нелинейном резонансе нелинейный осциллятор обладает $\mathcal{N} \approx 2\beta^{1/2}$ квазиэнергетическими состояниями, локализованными в окрестности резонанса и заключающими в себе от $\delta n_- \approx \beta^{1/4}$ до $\delta n_+ \approx \beta^{1/2}$ состояний базиса. Разность (соседней пары) квазиэнергий таких состояний, $\hbar\tilde{\omega} = \hbar\sqrt{\Omega\Delta}$, пропорциональна корню из амплитуды внешнего поля.

§14.3 Квантовый нелинейный осциллятор в гармоническом поле: сильное поле

◆ Выше мы ограничились случаем умеренно сильного поля, когда частота Раби была связана неравенствами $\Delta \ll \Omega \ll \omega$. В случае сильного поля, при $\Omega \gg \omega$, нельзя пренебрегать быстро вращающимися членами в уравнении (22). Проводя континуализацию этого уравнения, для сильного поля получаем уравнение (33) ⇓

$$i\frac{\partial a}{\partial t}=-\frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\left(1+\cos 2\omega t\right)-\Omega a\left(1+\cos 2\omega t\right)+i\Omega\frac{\partial a}{\partial q}\sin 2\omega t+\Delta\frac{q^2}{2}a\,.$$

По сравнению с (25) в этом уравнении добавились три высокочастотных члена. Первый описывает модуляцию эффективной массы: дважды за период поля она проходит значения от $\tilde{m}/2$ до ∞. Второй описывает модуляцию дна потенциальной ямы: он физически неважен и может быть включен в общую фазу волновой функции. Наконец, третий описывает действующую на осциллятор гармоническую силу, пропорциональную импульсу. Перед нами задача о движении квантового параметрически модулированного гармонического осциллятора под действием переменной внешней силы.

Для дальнейших расчетов технически удобно сделать замену $t\to -t$, $q\to -q$. Уравнение примет вид (34)⇓

$$i\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\Omega}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\left(1+\cos 2\omega t\right)+\Omega a\left(1+\cos 2\omega t\right)-i\Omega\frac{\partial a}{\partial q}\sin 2\omega t-\Delta\frac{q^2}{2}a$$

Мы будем рассматривать эволюцию самого компактного КЭС, которое в умеренном поле описывается ВФ (29). Действуя по аналогии с решением Хусими (§ 12.5), будем искать решение уравнения (34) в виде гауссова пакета с переменными параметрами

$$a\left(q\right)=\exp\left(-fq^2-gq-h\right). \qquad (35)$$

Параметр f контролирует ширину пакета, g - положение его центра, а h обеспечивает сохранение нормировки пакета. Подставляя (35) в (34) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q, получаем систему уравнений

$$-i\dot{f}=-\frac{\Delta}{2}+2\Omega f^2\left(1+\cos 2\omega t\right), \qquad (36)$$

$$-i\dot{g}=2\Omega fg\left(1+\cos 2\omega t\right)+2if\Omega\sin 2\omega t\,, \qquad (37)$$

$$-i\dot{h}=\Omega\left(1-f+\frac{g^2}{2}\right)\left(1+\cos 2\omega t\right). \qquad (38)$$

Нас интересуют периодические решения этой системы.

◆ Свойства системы (36-38) существенно зависят от величины безразмерного параметра $\varepsilon=\Omega\Delta/\omega^2$, который в области сильного поля может быть как мал, так и велик. Начнем со случая $\varepsilon\ll 1$, в котором можно найти приближенные решения уравнений (36) и (37) в форме быстро сходящихся рядов Фурье. Ограничиваясь гармоникой частоты 2ω, получаем

$$f=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Omega}}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\Omega\Delta^3}}{\omega^2-\Omega\Delta}\cos 2\omega t+\frac{i}{4}\frac{\omega\Delta}{\omega^2-\Omega\Delta}\sin 2\omega t, \qquad (39)$$

$$g=\frac{2\omega\sqrt{\Omega\Delta}}{4\omega^2-\Omega\Delta}\cos 2\omega t+i\frac{\Omega\Delta}{4\omega^2-\Omega\Delta}\sin 2\omega t. \qquad (40)$$

Постоянный член в (39) описывает уже известное нам значение нулевого приближения $f_0=1/2\sqrt{\beta}$ (см. (29)). Решения (39, 40) показывают, что центр гауссова пакета осциллирует по гармоническому закону с частотой 2ω и амплитудой

$$Q=\frac{2\omega\Omega}{4\omega^2-\Omega\Delta}. \qquad (41)$$

Заметим, что при

$$\Omega>2^{2/3}\omega^{4/3}\Delta^{-1/3} \qquad (42)$$

амплитуда осцилляций превосходит ширину пакета: состав заселенных состояний, образующих компактное КЭС, почти полностью обновляется на протяжении периода поля.

☆ Задача. При каком условии режим (42) будет достижим в области $\varepsilon\ll 1$?

Далее, ширина гауссова пакета меняется по гармоническому закону с частотой 2ω, причем относительная амплитуда осцилляций ширины мала вместе с ε:

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta^{1/4}\left[1+\frac{\Delta\Omega}{2\left(\omega^2-\Delta\Omega\right)}\cos 2\omega t\right]. \qquad (43)$$

◆ Среднее значение координаты исходного осциллятора дается выражением

$$x(t)=X\sum_q\left[a_q^*(t)a_{q-1}(t)e^{i\omega t}+a_q^*(t)a_{q+1}(t)e^{-i\omega t}\right]. \qquad (44)$$

Используя выражения (35), (39) и (40) и заменяя суммирование в (44) интегрированием, получаем для закона движения в двухмодовом приближении выражение

$$x(t)=B_1\cos\omega t+B_3\cos 3\omega t, \qquad (45)$$

где

$$B_1=2X\left(1-\frac{\Omega\Delta}{8\omega^2}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{\Delta}{16\Omega}}\right) \qquad (46)$$

$$B_3 = X\frac{\Omega\Delta}{4\omega^2}\exp\left(-\sqrt{\frac{\Delta}{16\Omega}}\right) \tag{47}$$

Выражение для амплитуды первой гармоники в пределе $\hbar \to 0$ дает $B_1 \approx 2X$, что совпадает с классическим выражением. Второй член в (45) показывает, что в системе, где в спектре невозмущенного движения высшие гармоники по построению модели отсутствуют (отличны от нуля только матричные элементы перехода между соседними состояниями), возмущенное гармоническим полем движение обладает слабой компонентой на третьей гармонике, пропорциональной амплитуде поля, квадрату амплитуды первой гармоники и сохраняющейся в классическом пределе.

★ Подчеркнем, что эта компонента принципиально отличается от обычного в теории нелинейных колебаний вклада на третьей гармонике, пропорционального кубу амплитуды поля. С другой стороны, отметим аналогию с задачей о резонансной кубичной поляризуемости двухуровневой системы (§11.1), где две амплитуды компонент излучения вблизи третьей гармоники пропорциональны квадрату амплитуды поля.

◆ Вывод о наличии компоненты на третьей гармонике не является артефактом приближений, сделанных в квантовой задаче, и может быть получен классически. Пусть, например, гамильтониан $\hat{H}_0$ описывает частицу, движущуюся в потенциале $U(x)$. Выберем начальные условия так, чтобы движение невозмущенной системы в соответствии с уравнением

$$m\ddot{x} + U_x = 0 \tag{48}$$

при энергии E было периодическим с частотой ω, $x_0(t) = \sum_k A_k \cos k\omega t$.

Пусть также и движение возмущенной системы (с уравнением движения $m\ddot{x} + U_x = F\cos\omega t$) происходит с частотой ω, в резонансе со внешним полем: $x_1(t) = \sum_k B_k \cos k\omega t$. Разность между этими двумя законами движения, $\xi(t) = x_1(t) - x_0(t)$, назовем *резонансным откликом* системы. По определению резонансный отклик является периодической функцией, представимой рядом Фурье. Если внешнее поле мало, $F \to 0$, то в низшем порядке резонансный отклик может быть найден как пропорциональное F периодическое решение уравнения

$$m\ddot{\xi} + U_{xx}\xi = F\cos\omega t. \tag{49}$$

Фундаментальными решениями соответствующего однородного уравнения являются функции $\varphi_1 = \dot{x}_0$ и $\varphi_2 = x_0'$ (здесь и далее штрих означает дифференцирование по энергии E, соответствующей невозмущенному движению). Они позволяют выразить фурье-амплитуды резонансного отклика через фурье-амплитуды невозмущенного движения, их производные по энергии и производную от частоты по энергии, $\xi\left(A_k, A_k', \omega, \omega'\right)$. Общие формулы громоздки, но в интересующем нас случае, дающем аналог описанной в § 14.2 квантовой модели, при $A_k \equiv 0$ для всех $k \ge 2$ (эквивалент условия сильного отбора (12)) и $A_k' \equiv 0$ для всех k (эквивалент условия постоянства матричных элементов (13)), они упрощаются и дают

$$\xi_1 = -\frac{1}{16} F A_1^2 \frac{\omega'}{\omega} = -\xi_3 \tag{50}$$

в полном соответствии с квантовыми формулами (46, 47).

◆ Подведем итог.

При воздействии на слабо нелинейную квантовую систему с одной степенью свободы сильного гармонического поля, для которого выполняются условия $\omega \ll \Omega \ll \omega^2 \Delta^{-1}$, захваченные в квантовый нелинейный резонанс пакеты КЭС периодически изменяют свой состав. При $\Omega \ge \omega^{4/3} \Delta^{-1/3}$ это изменение велико в том смысле, что величина $\left|\left\langle \Psi(t_1) \middle| \Psi(t_2) \right\rangle\right|$ может стать сколь угодно малой. Энергетическая ширина пакетов КЭС тоже периодически меняется, но это изменение является относительно слабым. Фазы (а при $\Omega \ge \omega^{4/3} \Delta^{-1/3}$ также и модули) амплитуд образующих КЭС стационарных состояний изменяются быстро (характерные скорости изменения порядка $\Omega \gg \omega$), но компенсация вкладов соседних состояний оставляет в законе движения координаты $\left\langle x(t) \right\rangle$ только слабый ангармонический вклад – в соответствии с классической теорией резонансного отклика.

★ Выше мы ограничивались случаем $\varepsilon = \Omega \Delta \omega^{-2} \ll 1$. Противоположный случай, $\varepsilon \ge 1$, который можно назвать случаем гигантского поля, не требует специального рассмотрения. Дело в том, что параметр $\varepsilon = F X \omega' \omega^{-1}$ не содержит $\hbar$ и потому не затрагивается квазиклассическим предельным переходом. Величина ε определяет тип классического движения системы. Неравенство $\varepsilon \ge 1$ можно переписать в виде $\Delta\omega = \sqrt{F X \omega \omega'} \ge \omega$. Левая часть неравенства представляет собой характерную ширину нелинейного резонанса по частоте. Если эта величина превосходит частоту внешнего поля, то в соответствии с известным критерием перекрытия резонансов Чирикова, движение является сильно **хаотическим**, а резонансное решение (периодическое с частотой внешнего поля), которое мы рассматривали, теряет устойчивость. В этом случае конструктивное аналитическое описание системы невозможно.

EOL ☯

КОНЕЦ ЛЕКЦИЙ ВЕСЕННЕГО СЕМЕСТРА