ЛЕКЦИЯ #13
ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР - 2
СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

TEST #06

§ 13.1 Квазиэнергия гармонического осциллятора

◆ Используя вывод предыдущего параграфа, вычислим квазиэнергию гармонического осциллятора в гармоническом поле $f(t) = f\cos\omega t$. В расчетах будем пользоваться обозначением ω_0 для собственной частоты осциллятора. Из уравнения

$$\ddot{\eta} + \eta = f(t), \qquad (1)\equiv(12.42)$$

получаем

$$\eta = \frac{f\cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad \dot{\eta} = -\frac{f\omega\sin\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (2)$$

Функция Лагранжа системы дается выражением

$$L(t) = \frac{f^2\omega^2\sin^2\omega t}{2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} - \frac{f^2\omega_0^2\cos^2\omega t}{2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} + \frac{f^2\cos^2\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (3)$$

Усредняя ее по времени и меняя знак, получим выражение для величины квазиэнергетического сдвига гармонического осциллятора в однородном гармоническом поле:

$$\boxed{\Delta\tilde{E} = -\frac{f^2}{4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}.} \qquad (4)$$

◆ Рассмотрим предельные случаи этого выражения. В низкочастотном (адиабатическом) пределе $\omega \to 0$ минимум потенциальной энергии имеет в данный момент времени величину

$$\Delta U = -\frac{f^2(t)}{2\omega_0^2}. \qquad (5)$$

Квазиэнергетический сдвиг равен среднему за период значению понижения минимума потенциальной энергии,

$$\Delta\tilde{E} = \overline{\Delta U} = -\frac{f^2}{2\omega_0^2}\overline{\cos^2\omega t} = -\frac{f^2}{4\omega_0^2}. \qquad (6)$$

В высокочастотном пределе $\omega \to \infty$ гармонический осциллятор эквивалентен свободной частице. Величина квазиэнергетического сдвига

$$\Delta\tilde{E} = \frac{f^2}{4\omega^2} \qquad (7)$$

равна средней кинетической энергии осцилляций свободного электрона в однородном гармоническом поле. Эта величина не содержит $\hbar$ и может быть найдена классически. Рассмотрим (классическую) модель свободного электрона в однородном гармоническом поле, $m\ddot{x} = e\mathcal{E}\cos\omega t$. Скорость электрона дается выражением

$$\dot{x} = v_0 + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega}\sin\omega t\,. \tag{8}$$

Среднее значение кинетической энергии равно

$$\overline{T} = \overline{\frac{m\dot{x}^2}{2}} = \frac{mv_0^2}{2} + \overline{\frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\sin^2\omega t} = \overline{T}_0 + \Delta\tilde{E}\,. \tag{9}$$

Таким образом, воздействие внешнего поля добавляет к кинетической энергии поступательного движения свободного электрона величину $\Delta\tilde{E} = e^2\mathcal{E}^2 \big/ 4m\omega^2$.

★ В стандартных условиях величина зависящей от поля добавки мала по сравнению с энергией кванта: $\Delta\tilde{E} = 1.69\cdot 10^{-17}\,\textit{эрг} = 9.85\cdot 10^{-6}\,\hbar\omega_s$. Оценим интенсивность I_q излучения стандартной частоты, при которой сдвиг средней кинетической энергии, вызванный полем, равен энергии кванта: $\Delta\tilde{E} = \hbar\omega_s$. Из уравнения $e^2\mathcal{E}^2 \big/ 4m\omega_s^2 = \hbar\omega_s$ получаем $I_q = mc\hbar\omega_s^3 \big/ 2\pi e^2 = 1.1\cdot 10^{13}\,\textit{Вт см}^{-2}$.

★ При рассмотрении многофотонной ионизации в сильных полях в §9.1 отмечалось, что учет пространственной зависимости поля приводит к эффективному понижению границы непрерывного спектра. Наличие добавки $\Delta\tilde{E}$ приводит к эффективному повышению границы непрерывного спектра. Какой из этих эффектов более важен?

§13.2 Гармонический осциллятор, когерентные состояния и внешнее поле

◆ *Когерентными состояниями* $|\alpha\rangle$ гармонического осциллятора называются собственные состояния оператора уничтожения:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{10}$$

Параметр α в общем случае комплексен. Разложение вектора $|\alpha\rangle$ по стационарным состояниям гармонического осциллятора $|n\rangle$ имеет вид

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{11}$$

Из этой формулы видно, что когерентное в некоторый момент состояние остается таковым всегда:

$$\left|\alpha(t)\right\rangle = \left|\alpha(0)\exp - i\omega_0 t\right\rangle. \qquad (12)$$

◆ Пусть гармонический осциллятор при $t = 0$ находился в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$.

★ Отметим важный частный случай: когерентное состояние $|\alpha = 0\rangle$ является также основным стационарным состоянием $|n = 0\rangle$.

Рассмотрим эволюцию такого состояния при включении в момент $t = 0$ гармонического поля $\hat{V}(t) = -f\hat{x}\cos\omega t$. Из решения уравнения движения для оператора уничтожения в §12.4 непосредственно следует, что осциллятор, находившийся в начальный момент времени в когерентном состоянии $|\alpha(0)\rangle$, будет переходить в другие когерентные состояния с параметром

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-it} + \frac{f}{2\sqrt{2}}\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-it}}{1+\omega} + \frac{e^{-i\omega t} - e^{-it}}{1-\omega}\right]. \qquad (13)$$

Например, если $\alpha(0) = 0$, а $f \gg |1-\omega| \ll 1$, то осциллятор перейдет из основного состояния $|0\rangle$ в стационарные состояния с квантовыми числами, близкими к

$$\tilde{n} \approx \frac{f^2}{2(1-\omega)^2} \gg 1 \qquad (14)$$

за время порядка $T \approx \pi|1-\omega|^{-1} \gg 1$.

☆ Задача. Гармонический осциллятор находится в основном состоянии. Насколько близко к первому возбужденному состоянию его можно подвести однородным внешним полем, произвольно зависящим от времени?

§13.3 Гармонический осциллятор в резонансном поле

◆ Из приведенных выше примеров видно, что в задаче о воздействии гармонического внешнего поля на гармонический осциллятор случай точного резонанса ($\omega = \omega_0$ или $\omega = 1$) представляется совершенно особым и заслуживает отдельного рассмотрения.

Будем исходить из стандартной системы уравнений для медленных амплитуд (2.22) (базисные функции включают экспоненциальный фактор, определяющий зависимость от времени для стационарных состояний)

$$i\hbar\frac{da_n}{dt} = \sum_m a_m V_{nm}(t)e^{i\omega_{nm}t}. \qquad (15)\equiv(2.22)$$

Для оператора возмущения, описывающего однородное поле, $\hat{V}(t) = -F\hat{x}\cos\omega t$, отличны от нуля матричные элементы переходов с изменением номера уровня на ±1. Таким образом, в правых частях почти всех уравнений останется только по два слагаемых; перепишем систему в виде

$$i\frac{da_n}{dt} = \Omega_{n+}\cos\omega t\, e^{-i\omega_0 t} a_{n+1} + \Omega_{n-}\cos\omega t\, e^{+i\omega_0 t} a_{n-1}. \qquad (16)$$

Здесь

$$\Omega_{n+} = \Omega_0\sqrt{n+1}, \quad \Omega_{n-} = \Omega_0\sqrt{n}, \quad \Omega_0 = \frac{F}{\sqrt{\hbar m\omega_0}}. \qquad (17)$$

С целью решения системы (16) упростим ее. Во-первых, используем приближение вращающегося поля – сохраним в правых частях только медленно осциллирующие = постоянные члены:

$$i\frac{da_n}{dt} = \frac{\Omega_{n+}}{2}a_{n+1} + \frac{\Omega_{n-}}{2}a_{n-1}. \qquad (18)$$

Во-вторых, считая, что нам придется иметь дело только с состояниями с большими номерами, лежащими в небольшой окрестности некоторого уровня, $n \approx n_0 \gg 1$, можно пренебречь различием между матричными элементами переходов вверх и вниз:

$$i\frac{da_n}{dt} = \frac{\Omega}{2}\left(a_{n+1} + a_{n-1}\right), \qquad (19)$$

где $\Omega \approx \Omega_{n_0\pm}$. Подстановкой в это уравнение $a_n = i^n b_n$ получаем

$$\frac{db_n}{d(-\Omega t)} = \frac{1}{2}\left(b_{n-1} - b_{n+1}\right). \qquad (20)$$

Сравнивая это уравнение с известным рекуррентным соотношением для функций Бесселя (см. [ГР63], формула 8.471.2)

$$\frac{dZ_\nu}{dz} = \frac{1}{2}\left(Z_{\nu-1} - Z_{\nu+1}\right) \qquad (21)$$

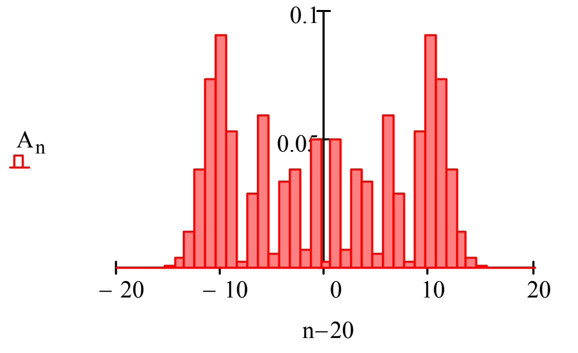
📖 [ГР63] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик
Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.
М.: - Физматгиз, 1963.

мы можем сразу же записать решение, соответствующее начальным условиям, при которых при $t = 0$ заселен только один уровень $\left|n\right\rangle$:

$$\boxed{a_k(t) = i^k J_{n-k}(-\Omega t),} \qquad (22)$$

где n - индекс начального состояния.

◆ Хотя картина поведения населенностей уровней, соседних с начально заселенным, в деталях весьма сложна (см. рисунок),



Распределение населенностей по уровням гармонического осциллятора при $\Omega t = 12$. По оси абсцисс – отклонение номера состояния от начально заселенного.

в общих чертах она вполне понятна. Обратимся к свойствам бесселевых функций, разобранным в §11.2. Уровень k остается практически незаселенным, пока аргумент функции Бесселя $J_{n-k}(\Omega t)$ не достигнет ее индекса $|k-n|$. Тогда его населенность быстро достигнет максимума $\max w_k \approx 0.456|k-n|^{-2/3}$, а затем будет убывать (осциллируя), в среднем по закону $w_k = |a_k|^2 \sim t^{-1}$. Энергетическая ширина области заселенных уровней будет увеличиваться со временем по закону $\Delta E \sim t$. Такое расплывание пакета по энергетической оси (оно зазывается *баллистическим*) идет быстрее, чем диффузионное ($\Delta E \propto \sqrt{t}$), возникающее при поглощении энергии внешнего гармонического поля квантовыми системами с квазинепрерывным энергетическим спектром (§7.3).

Из теории бесселевых функций известно соотношение

$$\Delta E^2 = \sum (n-k)^2 J_{n-k}^2(-\Omega t) = \frac{1}{2}\Omega^2 t^2, \tag{23}$$

которое показывает, что, несмотря на осцилляции населенностей отдельных уровней, рост дисперсии энергии системы является монотонным.

§13.4 Слабо нелинейный осциллятор

◆ В классической теории нелинейный осциллятор отличается от линейного двумя свойствами: неизохронностью (зависимостью частоты от энергии) и ангармонизмом (наличием в законе движения высших гармоник).

☆ Задача. Рассмотрим модели типа $\ddot{x} + U'(x) = 0$. Может ли нелинейная ($U' \neq kx$) система быть изохронной? Может ли нелинейная ($U' \neq kx$) система обладать гармоническим законом движения?

Для квантовой радиофизики определяющим является первое свойство, приводящее к (малой) неэквидистантности спектра квантовой модели. Ее спектр (ограничиваемся системой с одной степенью свободы) может быть задан в виде

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n - \frac{\kappa}{2}n^2\right), \tag{24}$$

где n - главное квантовое число (номер уровня), κ - коэффициент нелинейности. Частоты переходов между соседними уровнями суть

$$\omega_t \approx \frac{1}{\hbar}\cdot\frac{dE}{dn} = \omega_0(1-\kappa n). \tag{25}$$

Величина ω_t неотрицательна: отсюда $\kappa \approx \mathcal{N}^{-1}$, где $\mathcal{N}$ - число состояний дискретного спектра. Для квазиклассических систем число связанных состояний пропорционально корню из борновского параметра $B = 2mU_0a^2\hbar^{-2}$: $\mathcal{N} \sim \sqrt{B}$. Для двухатомных молекул $B \approx 10^4$ и $\kappa \approx 10^{-2}$.

◆ Если частота внешнего гармонического поля ω находится в точном резонансе с переходом $n \to n+1$, $\omega = \omega_0(1-\kappa n)$, то расстройка частоты поля от резонанса с переходом $n \to n-1$ есть $\Delta = \omega_0\kappa$. При выполнении условия

$$\beta_d = \frac{\Omega}{\omega_0\kappa} \geq 1 \tag{26}$$

нельзя пренебречь переходами в состояние $|n-1\rangle$: модель двухуровневой системы теряет применимость.

§13.4 Классический нелинейный осциллятор в гармоническом поле: нелинейный резонанс и бистабильность

◆ Рассмотрим классическую модель нелинейного *осциллятора Дуффинга* во внешнем гармоническом поле, заданную уравнением движения [ЛЛI, §28]

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2\left(x + \lambda x^3\right) = m\lambda^{-1/2}\omega_0^2 F\cos\omega t. \tag{27}$$

Принимая $m, \omega_0, \lambda \equiv 1$, уравнение (27) можно переписать в приведенной форме

$$\ddot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t. \tag{28}$$

Такая модель определяется двумя безразмерными параметрами F и ω. Введем эффективную расстройку

$$\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{2}. \tag{29}$$

При $\omega \approx 1$ $\Delta \approx \omega - 1$.

◆ Если действующая на систему сила мала, $F \ll 1$, то периодическое с периодом внешнего поля движение системы может описываться гармоническими колебаниями, $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Амплитуда этих колебаний A удовлетворяет уравнению [ЛЛI, §29]

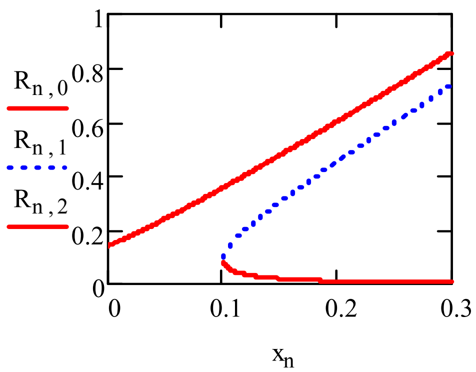
$$A^2\left(\Delta - \frac{3}{8}A^2\right)^2 = \frac{F^2}{4}. \tag{30}$$

При фиксированной расстройке Δ и достаточно малых F уравнение (30) имеет три положительных корня, $A_d < A_s < A_u$:

$$A_d \approx \frac{F}{2\Delta} \ll \Delta \ll 1 \tag{31}$$

$$A_{u,s} \approx \sqrt{\frac{8}{3}\Delta} \pm \frac{F}{2\Delta} \tag{32}$$

Как будет показано ниже, решения u и d устойчивы, а решение s неустойчиво.



Зависимость амплитуд вынужденных колебаний от расстройки Δ при $F = 0.05$. Сплошные линии – устойчивые ветви, пунктирная линия – неустойчивая ветвь.

◆ Выше описан случай точного резонанса. Исследуем движение системы вблизи резонанса методом медленно меняющихся амплитуд (ММА), положив

$$x(t) = q(t)\cos\omega t + p(t)\sin\omega t. \tag{33}$$

При дополнительных предположениях $\Delta \ll 1$, $F \ll 1$ получаем уравнения движения для медленных амплитуд

$$\dot{q} = -\frac{2\Delta}{\omega}p + \frac{3}{4\omega}\left(q^2 + p^2\right)p, \tag{34}$$

$$\dot{p} = \frac{F}{\omega} + \frac{2\Delta}{\omega}q - \frac{3}{4\omega}\left(q^2 + p^2\right)q \tag{35}$$

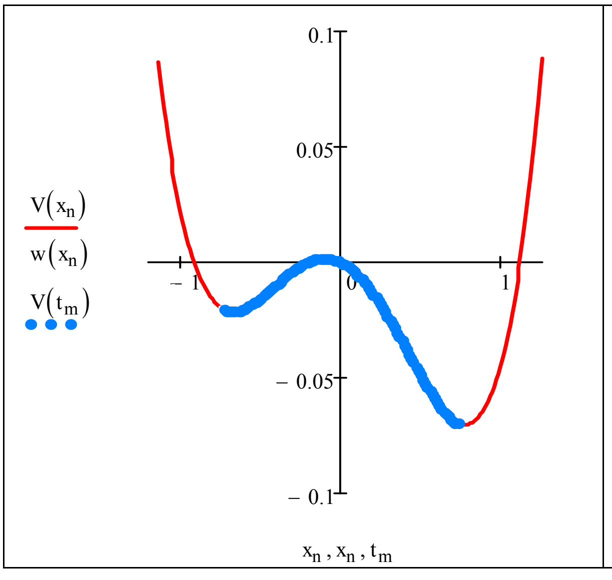
Это - система канонических уравнений для гамильтониана

$$\Lambda(p,q) = T(p,q) + V(q), \tag{36}$$

$$T(p,q) = -\frac{\Delta}{\omega} p^2 \left[1 - \frac{3}{16\Delta} \left(2q^2 + p^2 \right) \right], \tag{37}$$

$$V(q) = -\frac{F}{\omega} q - \frac{\Delta}{\omega} q^2 + \frac{3}{16\omega} q^4. \tag{38}$$

Система (34,35) может интерпретироваться как автономная модель, описывающая движение частицы переменной (и даже знакопеременной!) массы в потенциальном поле $V(q)$. Потенциал $V(q)$ имеет три точки экстремума, соответствующие (в порядке возрастания q) решениям s, d и u соответственно.



Сплошная линия – потенциал $V(q)$, заданный формулой (38). Утолщением линии выделена область, где эффективная масса частицы отрицательна. Параметры: $\Delta = 0.2$, $F = 0.04$.

В областях положительной массы минимумы потенциала соответствуют устойчивым точкам (u), а в областях отрицательной массы - неустойчивым (s); устойчивы максимумы потенциала (d)

☆ Задача. Линеаризовав систему (34,35) вблизи точек d и u, найти частоты малых колебаний системы вблизи этих положений равновесия.

EOL ☯