ЛЕКЦИЯ #11
ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА – 2

TEST #05

§ 11.1 Резонансная кубичная поляризуемость двухуровневой системы

◆ Полученные в предыдущем параграфе (§10.4) результаты показывают, что спектр излучения двухуровневой системы сосредоточен вблизи частоты ω действующего на систему поля. Возникает вопрос – имеются ли в спектре частоты, близкие к гармоникам поля?

Приближение вращающегося поля (ПВП) дает отрицательный ответ на этот вопрос, поскольку в его системе уравнений для амплитуд отброшены антирезонансные члены, ответственные за генерацию гармоник.

Для описания генерации гармоник для случая слабого поля ($\beta = \Omega/\Delta \ll 1$) можно вернуться к системе

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{db}{dt} &= \frac{a}{2}\left[Ve^{i(\omega_{21}+\omega)t} + V^* e^{i(\omega_{21}-\omega)t}\right], \\ i\hbar\frac{da}{dt} &= \frac{b}{2}\left[Ve^{-i(\omega_{21}-\omega)t} + V^* e^{-i(\omega_{21}+\omega)t}\right]. \end{aligned} \qquad (1)\equiv(10.2)$$

и решать ее по теории возмущений, используя стандартные начальные условия $a(0)=1,\ b(0)=0$. Сразу же видно, что квадратичная восприимчивость в модели ДУС обратится в ноль: формула

$$\chi_2(\omega) = \frac{e^3}{2\hbar^2}\sum_{m,k} x_{nm}x_{mk}x_{kn}R_{nmk}(\omega), \qquad (2)\equiv(8.7)$$

показывает, что для отличия восприимчивости от нуля необходимо наличие замкнутой петли из трех (ненулевых) матричных элементов, которую из матричных элементов x_{12} и x_{21} построить невозможно. Остается, впрочем, возможность ненулевой кубичной поляризуемости системы (как и высших нечетных поляризуемостей).

Однако применение теории возмущений не позволит рассмотреть самый интересный случай генерации гармоник в резонансном поле ($\beta = \Omega/\Delta \gg 1$).

◆ Обратимся к этому случаю, ограничившись точным резонансом ($\Delta = 0$). Начнем с системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\Delta v + \Omega w \sin 2\omega t, \\ \dot{v} &= \Delta u + \Omega w + \Omega w \cos 2\omega t, \\ \dot{w} &= -\Omega v - \Omega u \sin 2\omega t - \Omega v \cos 2\omega t \end{aligned} \qquad (3)\equiv(10.22)$$

с начальными условиями $u(0)=v(0)=0$, $w(0)=1$. Тогда решения нулевого приближения, пренебрегающего осциллирующими членами и эквивалентного ПВП, имеют вид:

$$u_0=0,\quad v_0=\sin\Omega t,\quad w_0=\cos\Omega t. \tag{4}$$

Представив уточненные решения в виде $u=u_0+u_1$ и $v=v_0+v_1$ и подставив их в первые два уравнения системы (3), для поправок первого порядка получим уравнения

$$\dot u_1=\Omega w_0\sin 2\omega t,\quad \dot v_1=\Omega w_0\cos 2\omega t, \tag{5}$$

которые элементарно интегрируются: с учетом нулевых начальных условий для поправок получаем (6)

$$u_1=\frac{2\Omega\omega-\Omega^2}{2\left(\Omega^2-4\omega^2\right)}\left\{\cos\left(2\omega+\Omega\right)t-1\right\}+\frac{2\Omega\omega+\Omega^2}{2\left(\Omega^2-4\omega^2\right)}\left\{\cos\left(2\omega-\Omega\right)t-1\right\},$$

$$v_1=\frac{2\Omega\omega-\Omega^2}{2\left(\Omega^2-4\omega^2\right)}\sin\left(2\omega+\Omega\right)t-\frac{2\Omega\omega+\Omega^2}{2\left(\Omega^2-4\omega^2\right)}\sin\left(2\omega-\Omega\right)t \tag{7}$$

Поправка к поляризации системы (см. (10.27)),

$$P_1=u_1\cos\omega t-v_1\sin\omega t, \tag{8}$$

в этом случае принимает вид

$$P_1=\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}\left[\Omega^2\sin\Omega t\sin\omega t-2\Omega\omega\cos\omega t+2\Omega\omega\cos\Omega t\cos\omega t\right]. \tag{9}$$

Очевидно, она имеет фурье-компоненты только вблизи основной частоты поля.

◆ Продолжим расчет. Полагая $w=w_0+w_1$, для первой поправки к продольной компоненте вектора Блоха находим (10)

$$w_1=-\frac{2\Omega\omega-\Omega^2}{2\left(\Omega^2-4\omega^2\right)}\left\{\cos\left(2\omega+\Omega\right)t-1\right\}+\frac{2\Omega\omega+\Omega^2}{2\left(\Omega^2-4\omega^2\right)}\left\{\cos\left(2\omega-\Omega\right)t-1\right\}$$

Это выражение позволяет вычислить поправки второго порядка u_2 и v_2. Они содержат в спектре частоты 2ω, $2\omega\pm\Omega$, $4\omega\pm\Omega$ и Ω и дают вклад в поляризацию в окрестности частоты третьей гармоники. Этот вклад имеет вид

$$\begin{aligned}P_2=&\frac{\Omega^2\omega}{2\left(\Omega+2\omega\right)^2\left(\Omega+4\omega\right)}\cos\left(3\omega+\Omega\right)t-\\&-\frac{\Omega^3}{4\omega\left(\Omega^2-4\omega^2\right)}\cos 3\omega t+\frac{\Omega^2\omega}{2\left(\Omega-2\omega\right)^2\left(\Omega-4\omega\right)}\cos\left(3\omega-\Omega\right)t.\end{aligned} \tag{11}$$

Спектр излучения двухуровневой системы в резонансном поле вблизи частоты третьей гармоники представляет собой триплет с частотами 3ω, $3\omega \pm \Omega$. Удивительной чертой решения является поведение амплитуд боковых компонент триплета: они растут пропорционально не кубу (как надо было ожидать на основе теории возмущений – см. §8.5 – и как ведет себя амплитуда центральной компоненты), а **квадрату** амплитуды поля.

§ 11.2 Рассеяние сильного поля на двухуровневой системе

◆ Рассчитанное в приближении вращающегося поля сечение рассеяния резонансного излучения на двухуровневой системе убывает с ростом интенсивности, достигая на верхней границе применимости приближения ($I \sim I_+$) значения порядка сечения нерезонансного рассеяния. Рассмотрим процессы рассеяния в полях с интенсивностью $I \gg I_+$. Поскольку $\Omega \geq \omega_{21}$, переход во вращающуюся систему координат нецелесообразен. Уравнения для исходных компонент вектора Блоха имеют вид

$$\frac{dP}{dt} = -\omega_{21} Q, \quad \frac{dQ}{dt} = \omega_{21} P - 2\Omega R \cos\omega t, \quad \frac{dR}{dt} = 2\Omega Q \cos\omega t. \quad (12)$$

Если $\Omega \gg \omega_{21}$, то в правых частях можно сохранить только члены, пропорциональные Ω. Остаются два уравнения,

$$\frac{dQ}{dt} = -2\Omega R \cos\omega t, \quad \frac{dR}{dt} = 2\Omega Q \cos\omega t, \quad (13)$$

обладающие первым интегралом $J_1 = Q^2 + R^2 \cong 1$. Подстановка $Q = \sin\phi(t)$, $R = \cos\phi(t)$ приводит к одному уравнению первого порядка

$$\frac{d\phi}{dt} = -2\Omega \cos\omega t. \quad (14)$$

Возьмем начальные условия $Q(0) = 0$, $R(0) = -1$. Тогда

$$Q(t) = \sin\left(\frac{2\Omega}{\omega}\sin\omega t\right), R(t) = -\cos\left(\frac{2\Omega}{\omega}\sin\omega t\right). \quad (15)$$

☆ Задача. Исследовать условия применимости решения (15) и найти к нему первую поправку.

Периодическую функцию $Q(t)$ можно разложить в ряд Фурье. Коэффициенты фурье-разложения будут выражаться через функции Бесселя первого рода $J_m(z)$ с нечетными индексами m от аргумента $z = 2\Omega/\omega$:

$$Q(t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)\sin(2n+1)\omega t\,. \tag{16}$$

★ Найденное решение содержит только нечетные гармоники частоты действующего поля, что связано со специальным выбором начальных условий. При начальных условиях общего вида в спектре $Q(t)$ будут присутствовать как нечетные, так и четные гармоники частоты действующего поля.

◆ Амплитуда дипольного момента системы определится из первого уравнения системы (12):

$$P(t) = 2\frac{\omega_{21}}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)\frac{\cos(2n+1)\omega t}{(2n+1)}. \tag{17}$$

Средняя мощность излучения есть

$$\mathbf{P} = \frac{2d^2}{3c^3}\overline{\ddot{P}^2} = \frac{4d^2\omega_{21}^2\omega^2}{3c^3}\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}^2\left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)\cdot(2n+1)^2. \tag{18}$$

Оценим входящую в выражение для мощности $\mathbf{P}$ сумму,

$$S_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}^2(z)\cdot(2n+1)^2, \tag{19}$$

при больших значениях аргумента ($z \gg 1$). Асимптотики функций Бесселя имеют вид

$$J_n(z) \approx \frac{z^n}{2^n n!} \quad (|z| \le 1), \tag{20}$$

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (|z| \gg 1, n). \tag{21}$$

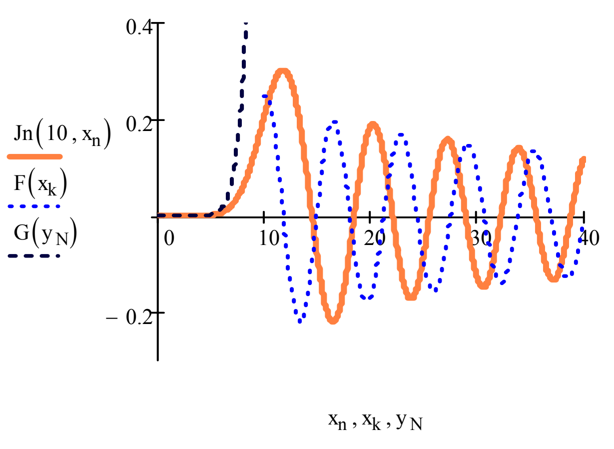

График функции $J_{10}(z)$ и ее асимптотик (20) (штриховая линия) и (21) (пунктирная линия)

Основной вклад в сумму дают слагаемые с $n \le z/2$. Это означает, что практически в излучении представлены только гармоники с номерами, не превосходящими $2\beta_+ = 2\Omega/\omega$ - параметр $2\beta_+$ определяет максимальную степень многоквантовости процесса генерации гармоник. Используя в этой области асимптотику (21), получаем

$$S_u(z) \approx \frac{2}{\pi z} \sum_{n=0}^{z/2} (2n+1)^2 \approx \frac{z^2}{3\pi}. \tag{22}$$

★ Полученная оценка дает для отношения $S_u(z)/z^2$ в пределе больших z постоянное значение $(3\pi)^{-1} = 0.106$. Численные расчеты дают для этой константы значение 0.125.

С учетом формулы (22) находим, что полная мощность излучения,

$$\mathbf{P} \approx \frac{16 d^2 \omega_{21}^2 \Omega^2}{9\pi c^3}, \tag{23}$$

растет пропорционально интенсивности действующего излучения. Сечение полного рассеяния сильного поля на двухуровневой системе, учитывающее все излучаемые гармоники,

$$\sigma \approx \frac{128}{9} \alpha^4 a_0^2 \left(\frac{\omega_{21}}{\omega_a} \right)^2, \tag{24}$$

не зависит от интенсивности и имеет приблизительно ту же величину, что и сечение нерезонансного рассеяния.

EOL ☯