ЛЕКЦИЯ #10
ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА - 1

§ 10.1 Построение модели

◆ Если частота ω гармонического электромагнитного поля, действующего на квантовую систему, находящуюся в состоянии $|n\rangle$, близка к частоте одного из переходов ω_{mn} настолько, что найденная по теории возмущений амплитуда $a_m(t)$ не мала, и если при этом для всех остальных состояний $|k\rangle \neq |m\rangle, |n\rangle$, выполнено условие малости амплитуд, $|a_k(t)| \ll 1$, то для описания поведения системы в резонансном поле этими амплитудами можно пренебречь. Обозначим заново существенные стационарные состояния невозмущенной системы: $|n\rangle \equiv |1\rangle$ и $|m\rangle \equiv |2\rangle$. Будем предполагать, что $\omega_{21} > 0$. Состояние системы S может быть приближенно описано ВФ вида

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= A(t)\varphi_1(\vec{r}) + B(t)\varphi_2(\vec{r}) = \\ &= a(t)e^{-i\omega_1 t}\varphi_1(\vec{r}) + b(t)e^{-i\omega_2 t}\varphi_2(\vec{r}). \end{aligned} \tag{1}$$

Модель с произвольным гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ и вектором состояния вида (1) называется *двухуровневой системой*. Величины A и B будем называть *быстрыми*, а a и b - *медленными амплитудами* состояний двухуровневой системы.

◆ Уравнения для медленных амплитуд $a(t)$ и $b(t)$ в гармоническом поле $\hat{V}(t) = \hat{V}\cos\omega t$ можно получить, оставив от системы (2.22) только два уравнения:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{db}{dt} &= \frac{a}{2}\left[Ve^{i(\omega_{21}+\omega)t} + V^* e^{i(\omega_{21}-\omega)t}\right], \\ i\hbar\frac{da}{dt} &= \frac{b}{2}\left[Ve^{-i(\omega_{21}-\omega)t} + V^* e^{-i(\omega_{21}+\omega)t}\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

где $V = V_{12}$ - матричный элемент возмущения (в модели двухуровневой системы обычно предполагается, что диагональные матричные элементы возмущения равны нулю: $V_{11} = V_{22} = 0$). Непосредственное аналитическое решение системы уравнений (2) представляет значительные трудности. Действительно, на языке теории колебаний мы имеем дело с четырехмерной ($K = 4$) системой (a и b комплексны), находящейся под параметрическим квазипериодическим двухчастотным возмущением.

◆ Упрощение системы (2) возможно, если возмущение не слишком велико - мал параметр

$$\beta_+ = \frac{V}{\hbar\omega_{21}}. \tag{3}$$

★ Если $\hat{V} = -\vec{d}\vec{E}(t)$ - оператор дипольного взаимодействия, а $\omega_{21} = \omega_s$, то условие $\beta_+ = 1$ выполняется при напряженности поля излучения $\mathcal{E}_+ = 7.32 \cdot 10^5\ \mathit{Гс}$, которому соответствует интенсивность $I_+ = 6.4 \cdot 10^{13}\ \mathit{Вт}\ \mathit{см}^{-2} = 6.4 \cdot 10^5 I_s$.

В этом случае для описания переходов в условиях, близких к резонансу, можно использовать *приближение вращающегося поля*, сохранив в уравнениях только те (резонансные) члены, в которых показатели экспонент в резонансе обратятся в ноль. Тогда система (2) примет вид

$$i\frac{da}{dt} = b\frac{\Omega}{2}e^{-i\Delta t}, \quad i\frac{db}{dt} = a\frac{\Omega^*}{2}e^{i\Delta t}, \tag{4}$$

где $\Omega = V_{12}/\hbar$ есть частота Раби. С точки зрения теории колебаний, переход к приближению вращающегося поля заменяет квазипериодическое двухчастотное воздействие на гармоническое.

★ Доказать, что величина $J_1 = |a|^2 + |b|^2$ является интегралом движения системы (4).

Система (4) может быть сведена к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2b}{dt^2} - i\Delta\frac{db}{dt} + \frac{|\Omega|^2}{4}b = 0, \tag{5}$$

общее решение которого имеет вид

$$b(t) = b_1 \exp i\left(\frac{\Delta + \Omega_+}{2}t\right) + b_2 \exp i\left(\frac{\Delta - \Omega_+}{2}t\right), \tag{6}$$

где введено обозначение

$$\Omega_+ = \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2}. \tag{7}$$

Соответственно, общее решение для амплитуды $a(t)$ есть

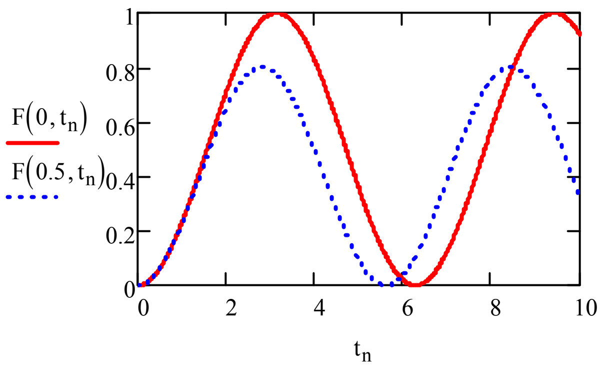
$$a(t) = a_1 \exp -i\left(\frac{\Delta - \Omega_+}{2}t\right) + a_2 \exp -i\left(\frac{\Delta + \Omega_+}{2}t\right). \tag{8}$$

Выберем начальные условия в виде $a(0) = 1$, $b(0) = 0$. Тогда зависимость амплитуды состояния $|2\rangle$ имеет вид

$$b(t) = i\frac{|\Omega|}{\Omega_+}e^{i\frac{\Delta t}{2}}\sin\frac{\Omega_+}{2}t. \tag{9}$$

Вероятность перехода в состояние $|2\rangle$ определяется формулой

$$\boxed{W_{12} = \frac{|\Omega|^2}{\Omega_+^2}\sin^2\frac{\Omega_+}{2}t}. \tag{10}$$

	Зависимость вероятности перехода из основного состояния в возбужденное от времени в гармоническом поле в модели двухуровневой системы при точном резонансе (сплошная линия) и при расстройке $\Delta = 0.5\Omega$ (пунктир).

В двухуровневой системе под действием гармонического поля с расстройкой $\Delta = \omega_{21} - \omega$ вероятность перехода меняется со временем по гармоническому закону с частотой $\Omega_+ = \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2}$. Частота и амплитуда осцилляций вероятностей **растут** при увеличении возмущения.

☆ Задача. Проверить, переходит ли выражение (10) в результат (2.38), найденный в §2.4 по теории возмущений для малого интервала времени после внезапного включения резонансного поля.

☆ Задача. Исследовать при малой величине Ω/Δ поправку к частоте осцилляций амплитуды $b(t)$, отличающую результат двухуровневой модели от результата теории возмущений.

§ 10.2 Вектор Блоха и уравнения Блоха

◆ Состояния двухуровневой системы, взаимодействующей с переменным полем, удобно описывать с помощью компонент *вектора Блоха* - комбинаций амплитуд состояний 1 и 2, тесно связанных с наблюдаемыми величинами. Если двухуровневая система находится в состоянии с ВФ

$$\Psi(t) = A(t)\varphi_1(\vec{r}) + B(t)\varphi_2(\vec{r}), \tag{11}$$

то по определению компоненты *вектора Блоха* P, Q и R есть

$$P = A^*B + AB^*, \quad Q = i\left(A^*B - AB^*\right), \quad R = |B|^2 - |A|^2. \tag{12}$$

Величина R - разность населенностей уровней 2 и 1 - называется *продольной* компонентой, а P и Q *поперечными* компонентами. Величина R может быть связана с мгновенным значением средней энергии системы: $\langle E\rangle = \hbar\omega_{21}R$. Величины P и Q пропорциональны действительной и мнимой частям вектора дипольного момента системы. Если матричный элемент перехода имеет вид

$$\vec{d}_{12} = \langle 1|e\vec{r}|2\rangle = \vec{d}_1 + i\vec{d}_2, \tag{13}$$

где $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ - действительные векторы, то дипольный момент в состоянии с волновой функцией (11) есть $\vec{d} = P\vec{d}_1 + Q\vec{d}_2$. Практически всегда можно выбрать функции $\varphi_1(\vec{r})$ и $\varphi_2(\vec{r})$ действительными и положить $\vec{d}_2 = 0$, что мы и предполагаем в дальнейшем.

◆ Найдем вид динамических уравнений для величин P, Q и R в переменном поле. Если $\vec{d}_2 = 0$, тогда в переменном электрическом поле $\vec{E}f(t)$ частота Раби $\Omega = \vec{d}_1\vec{E}/\hbar$ будет действительна. Уравнения для быстрых амплитуд имеют вид

$$i\frac{dA}{dt} = \omega_1 A + B\Omega f(t), \quad i\frac{dB}{dt} = \omega_2 B + A\Omega f(t). \tag{14}$$

Из этой системы уравнений и определения компонент вектора Блоха следует система *уравнений Блоха*

$$\frac{dP}{dt} = -\omega_{21}Q, \quad \frac{dQ}{dt} = \omega_{21}P - 2\Omega f(t)R, \quad \frac{dR}{dt} = 2\Omega f(t)Q. \tag{15}$$

Система имеет первый интеграл $J_1 = P^2 + Q^2 + R^2 \equiv S^2$. Учитывая условие нормировки ВФ $|A|^2 + |B|^2 = 1$, находим, что $S^2 = 1$. Таким образом, величины P, Q и R можно рассматривать как декартовы компоненты вектора единичной длины, а состояние системы изображать точкой на сфере единичного радиуса - *сфере Блоха*.

★ Описание двухуровневой системы амплитудами A, B требует задания **четырех** действительных параметров ($\operatorname{Re} A, B$ и $\operatorname{Im} A, B$), подчиненных одному условию нормировки. Описание с помощью компонент вектора Блоха требует задания **трех** действительных параметров P, Q и R, подчиненных одному условию нормировки. Какую информацию содержит опущенный при переходе от амплитуд к компонентам вектора Блоха параметр?

★ Заметим, что если записывать волновую функцию двухуровневой системы как столбец,

$$\Psi = \begin{vmatrix} B\varphi_2 \\ A\varphi_1 \end{vmatrix}$$

то величины P, Q и R, можно представить в виде средних значений матриц Паули:

$$P = \langle \Psi | \sigma_1 | \Psi \rangle, \quad Q = \langle \Psi | \sigma_2 | \Psi \rangle, \quad R = \langle \Psi | \sigma_3 | \Psi \rangle$$

Матрицы Паули пропорциональны компонентам оператора спинового момента для частицы со спином $1/2$. В силу этого сходства вектор Блоха называют также вектором *квазиспина* или *энергетического спина*.

◆ Обратимся к рассмотрению эволюции двухуровневой системы в гармоническом переменном поле $f(t) = \cos\omega t$ в случае, близком к резонансу. Если выполнено условие $\beta_+ \ll 1$ (т.е. если $\Omega \ll \omega_{21}, \omega$), то скорости изменения поперечных компонент P и Q значительно больше скорости изменения разности населенностей R. Для рассмотрения окрестности резонанса удобно перейти к компонентам вектора Блоха во вращающейся с угловой скоростью ω системе координат. В такой системе скорости изменения компонент вектора Блоха будут иметь одинаковый порядок величин.

Введем переменные

$$u = P\cos\omega t + Q\sin\omega t,\ v = -P\sin\omega t + Q\cos\omega t,\ w = -R. \quad (16)$$

В этих переменных система уравнений Блоха (15) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\Delta v + \Omega w \sin 2\omega t, \\ \dot{v} &= \Delta u + 2\Omega w \cos^2 \omega t, \\ \dot{w} &= -2\Omega\left(u\sin\omega t + v\cos\omega t\right)\cos\omega t. \end{aligned} \quad (17)$$

Нас интересует эволюция системы с характерными скоростями порядка Δ или Ω, много меньшими ω. Поэтому в системе уравнений (17) можно заменить быстро осциллирующие тригонометрические функции их средними значениями. Таким образом получается следующий вид системы уравнений Блоха для вращающихся компонент вблизи резонанса:

$$\boxed{\dot{u} = -\Delta v, \quad \dot{v} = \Delta u + \Omega w, \quad \dot{w} = -\Omega v.} \quad (18)$$

Эта автономная система третьего порядка имеет два интеграла движения. Первый из них,

$$J_1 = u^2 + v^2 + w^2 \equiv S^2 = 1, \quad (19)$$

указывает, что несмотря на сделанные при выводе (18) приближения, состояние системы по-прежнему описывается точкой на поверхности сферы единичного радиуса. Второй интеграл движения,

$$J_2 = \Omega u - \Delta w, \quad (20)$$

задает уравнение плоскости, секущей сферу Блоха. Таким образом, конец вектора Блоха системы в гармоническом поле будет описывать окружность на поверхности сферы Блоха.

◆ Использование интегралов позволяет найти решения системы (18). Для изучавшихся ранее начальных условий, соответствующих системе в состоянии $|1\rangle$ до начала действия поля ($u(0) = v(0) = 0$, $w(0) = 1$), решение имеет вид

$$\begin{gathered} u(t) = -\frac{\Delta\Omega}{\Omega_+^2}\left(1 - \cos\Omega_+ t\right), \qquad v(t) = \frac{\Omega}{\Omega_+}\sin\Omega_+ t, \\ w(t) = \frac{\Delta^2 + \Omega^2\cos\Omega_+ t}{\Omega_+^2}. \end{gathered} \quad (21)$$

При точном резонансе ($\Delta = 0$) вектор Блоха всегда находится в плоскости OVW.

§ 10.3 Сдвиг Блоха - Зигерта

◆ Усреднение системы (17) и переход к форме (18) эквивалентны использованию приближения вращающегося поля (§ 10.1). Точная система уравнений (30) позволяет отыскать поправки к решениям этого приближения. Перепишем полную систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\Delta v + \Omega w \sin 2\omega t, \\ \dot{v} &= \Delta u + \Omega w + \Omega w \cos 2\omega t, \\ \dot{w} &= -\Omega v - \Omega u \sin 2\omega t - \Omega v \cos 2\omega t. \end{aligned} \tag{22}$$

Пусть u_0, v_0 и w_0 - решения усредненной системы. Положим $w = w_0 + w_1$. Тогда для поправки w_1 получаем уравнение

$$\dot{w}_1 = -\Omega u_0 \sin 2\omega t - \Omega v_0 \cos 2\omega t. \tag{23}$$

Переменные u_0 и v_0 изменяются медленно. Проинтегрируем уравнение (36), считая их константами: тогда

$$w_1(t) \approx \frac{\Omega}{2\omega} u_0 \cos 2\omega t - \frac{\Omega}{2\omega} v_0 \sin 2\omega t. \tag{24}$$

Подставляя это выражение в первые два уравнения системы (22), после усреднения по быстрым осцилляциям поля получаем

$$\dot{u} = -\left(\Delta + \frac{\Omega^2}{4\omega}\right) v, \quad \dot{v} = \left(\Delta + \frac{\Omega^2}{4\omega}\right) u + \Omega w. \tag{25}$$

Из сравнения с системой (18) видно, что учет влияния быстро осциллирующих членов эквивалентен увеличению частоты перехода (а с ней и расстройки) на величину δ,

$$\delta = \frac{\Omega^2}{4\omega}, \tag{26}$$

которая называется *сдвигом Блоха - Зигерта*.

★ В стандартных условиях сдвиг Блоха - Зигерта $\delta = 6.85 \cdot 10^8\, c^{-1}$ примерно в 3200 раз меньше частоты Раби.

§ 10.4 Рассеяние на двухуровневой системе: простейшая модель

◆ Если матричный элемент дипольного момента между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ действителен, $\vec{d}_2 = 0$, то зависимость дипольного момента двухуровневой системы от времени пропорциональна компоненте P вектора Блоха. Выражая P через компоненты u и v во вращающейся системе координат, имеем

$$P = u \cos \omega t - v \sin \omega t. \tag{27}$$

Используем найденное выше решение (21), соответствующее начальным условиям, в которых до начала действия поля система находилась в основном состоянии. Элементарные расчеты дают

$$P = -\frac{\Delta\Omega}{\Omega_+^2}\cos\omega t + \Omega\frac{\Omega_+ + \Delta}{2\Omega_+^2}\cos(\omega+\Omega_+)t - \Omega\frac{\Omega_+ - \Delta}{2\Omega_+^2}\cos(\omega-\Omega_+)t. \tag{28}$$

> Под действием гармонического поля двухуровневая система излучает как на частоте внешнего поля ω, так и на боковых частотах $\omega \pm \Omega_+$, где $\Omega_+ = \sqrt{\Omega^2+\Delta^2}$ есть частота осцилляций компонент вектора Блоха во вращающейся системе координат.

Пренебрегая малыми величинами порядка Δ/ω и Ω/ω, получим выражение для полной мощности излучения:

$$\mathbf{P} = \frac{2 < \ddot{\vec{d}}^2 >}{3c^3} \approx \frac{\vec{d}^2\omega^4}{6c^3}. \tag{29}$$

Соответствующее сечение рассеяния дается выражением

$$\boxed{\sigma = \frac{\mathbf{P}}{I} = \frac{\vec{d}^2\omega^4}{6Ic^3}} \tag{30}$$

★ Для стандартного двухуровневого атома ($d_s = ea_0$) с резонансом на стандартной частоте ($\omega = \omega_s$) сечение рассеяния в стандартных условиях $\sigma_{2s} = 3.91\cdot 10^{-22}\,см^{-2}$. Оно примерно в 600 раз больше сечения рассеяния на свободном электроне (2.5).

> Мощность излучения, рассеиваемого двухуровневой системой в гармоническом квазирезонансном поле, почти **не зависит** от амплитуды действующего на систему поля, а сечение рассеяния **убывает** обратно пропорционально интенсивности действующего на систему излучения.

☆ Найти зависимость мощности излучения двухуровневой системы в гармоническом поле от расстройки Δ и амплитуды поля $\sim\Omega$ в резонансном случае ($\Delta \ll \Omega$) в первых неисчезающих порядках по Δ/ω и Ω/ω.

ИНТЕРЛЮДИЯ

А вы видели хоть один [атом]?
Эрнст Мах

☆ Задача. Одиночный атом с резонансной частотой $\omega_{21} = 2\omega_s$ и матричным элементом перехода $d_{21} = ea_0$, находящийся в ловушке, облучается резонансным монохроматическим (зеленым) светом.

Звездой какой величины будет казаться этот атом наблюдателю с расстояния $R = 10$ см?

◆ Применимость выражения (30) ограничена со стороны **слабых** полей. Такое ограничение связано с тем, что при построении модели не была учтено *спонтанное излучение* системы, находящейся в возбужденном состоянии. Пренебрежение этим процессом оправдано, если частота Раби Ω велика по сравнению со скоростью спонтанного излучения

$$\Gamma_s = \frac{4\vec{d}^2\omega^3}{3\hbar c^3}. \tag{31}$$

Приравнивая Ω и Γ_s, находим **нижнюю** границу применимости выражения (20) по напряженности поля: $\mathcal{E}_- = 4d\omega^3/3c^3$. В стандартных условиях $\mathcal{E}_- = 6.95\cdot10^{-4}\,Гс$, что соответствует интенсивности излучения $I_- = 5.77\cdot10^{-5}\,Вт\;см^{-2}$. На нижней границе применимости сечение рассеяния излучения на двухуровневой системе максимально и равно

$$\sigma_{2-} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 = \frac{4\pi}{3}\alpha^{-2}\eta^{-2}a_0^2. \tag{32}$$

Как и следовало ожидать, оно (параметрически) равно квадрату длины волны излучения - максимальной величине сечения рассеяния волны на точечном объекте [ЛЛIII, §§123, 133].

◆ Применимость выражения (30) ограничена со стороны **сильных** полей. Такое ограничение связано с тем, что при решении было использовано приближение вращающегося поля, предполагавшее малость параметра $\beta_+ = \Omega/\omega_{21}$ (3). Приравнивая этот параметр единице, найдем **верхнюю** границу применимости выражения (30) по напряженности поля. В стандартных условиях она равна $\mathcal{E}_+ = 7.32\cdot10^5\,Гс$, что соответствует интенсивности $I_+ = 6.4\cdot10^{13}\,Вт\;см^{-2}$. На верхней границе применимости сечение рассеяния излучения на двухуровневой системе минимально и равно

$$\sigma_{2+} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{d^4\omega^2}{\hbar^2 c^4} = \frac{4\pi}{3}\alpha^4\eta^2 a_0^2. \tag{33}$$

Оно имеет тот же порядок по α, что и сечения нерезонансного рассеяния излучения на атоме (2.4) и рассеяния на свободном электроне (2.5), отличаясь от них степенью частотного фактора η.

EOL ☯