

Метод эффективной среды

1. Эффективная плотность фотонных мод конечного фотонного кристалла
2. Закон дисперсии и эффективный показатель преломления конечного фотонного кристалла
3. Метод эффективной среды для описания генерации оптических гармоник

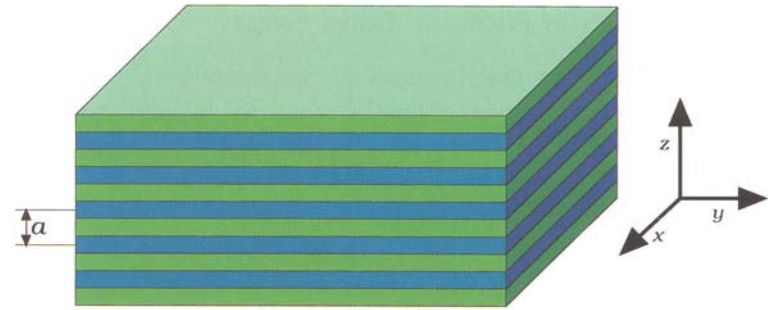
Уравнение Гельмгольца для конечного фотонного кристалла

уравнение Гельмгольца для эволюции напряженности электромагнитного поля

$$\frac{d^2 \Phi_\omega}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\omega(z) \Phi_\omega = 0$$

(в приближении плоских волн и отсутствия поглощения)

$\varepsilon_\omega(z)$ - действительная диэлектрическая проницаемость фотонного кристалла



Граничные условия для уравнения на передней и задней поверхностях:

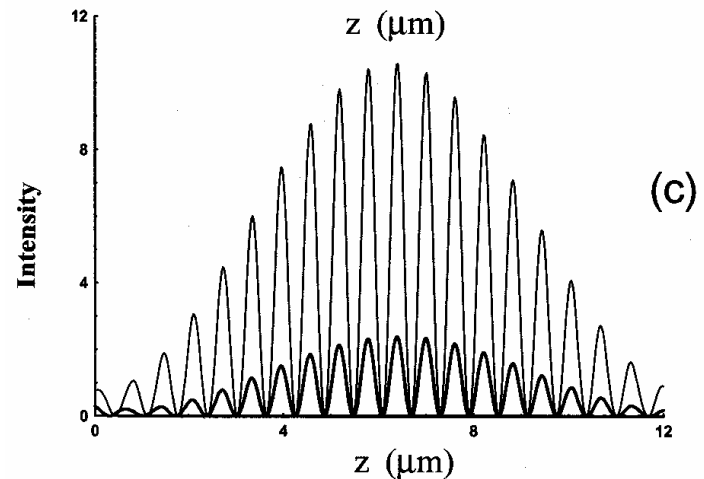
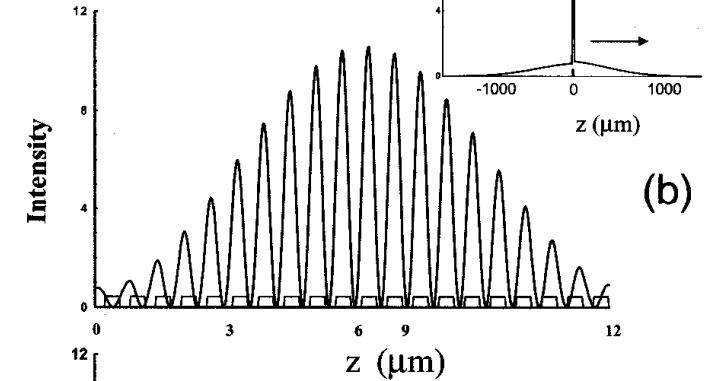
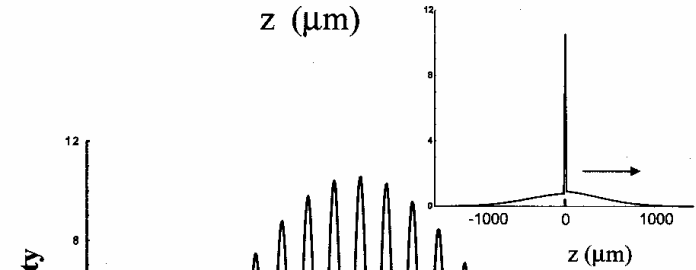
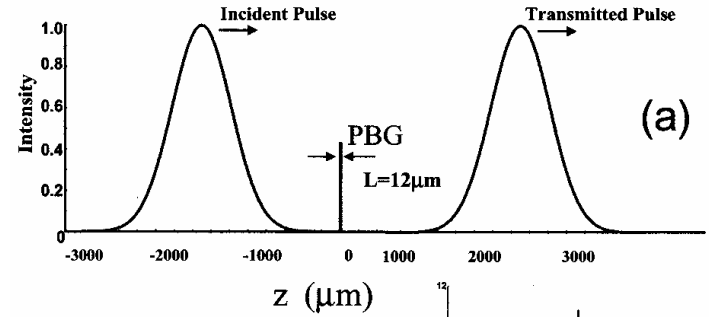
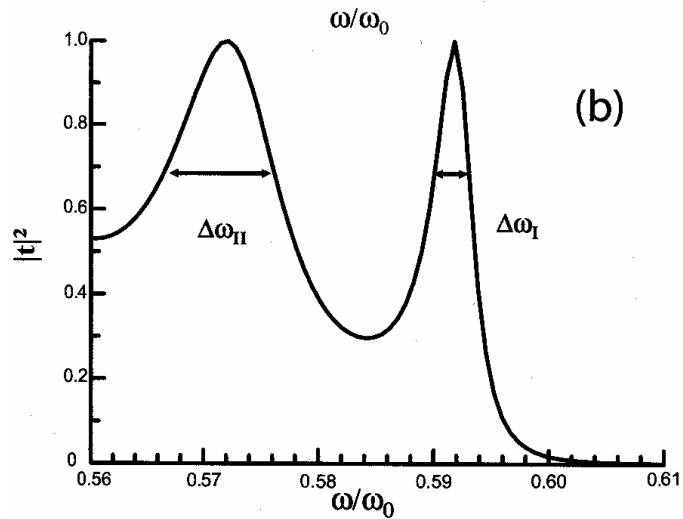
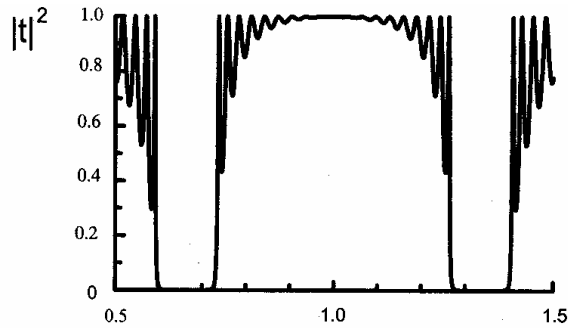
$$1 + r_\omega = \Phi_\omega(0), \quad t_\omega = \Phi_\omega(L),$$
$$i \frac{\omega}{c} (1 - r_\omega) = \frac{d\Phi_\omega(0)}{dz}, \quad i \frac{\omega}{c} t_\omega = \frac{d\Phi_\omega(L)}{dz}$$

r_ω и t_ω - коэффициенты отражения и пропускания

Φ_ω , r_ω , t_ω - безразмерны и заданы в единицах напряженности падающего электромагнитного поля:

$$\Phi_\omega(z) = E_\omega(z) / E_\omega^I, \quad r_\omega = E_\omega^r / E_\omega^I, \quad t_\omega = (E_\omega^t / E_\omega^I) e^{i(\omega/c)z}$$

Прохождение лазерного импульса через конечный фотонный кристалл



прохождение 2-пс и 200-фс импульсов

Эффективная плотность фотонных мод конечного фотонного кристалла

конечный фотонный кристалл как открытый резонатор

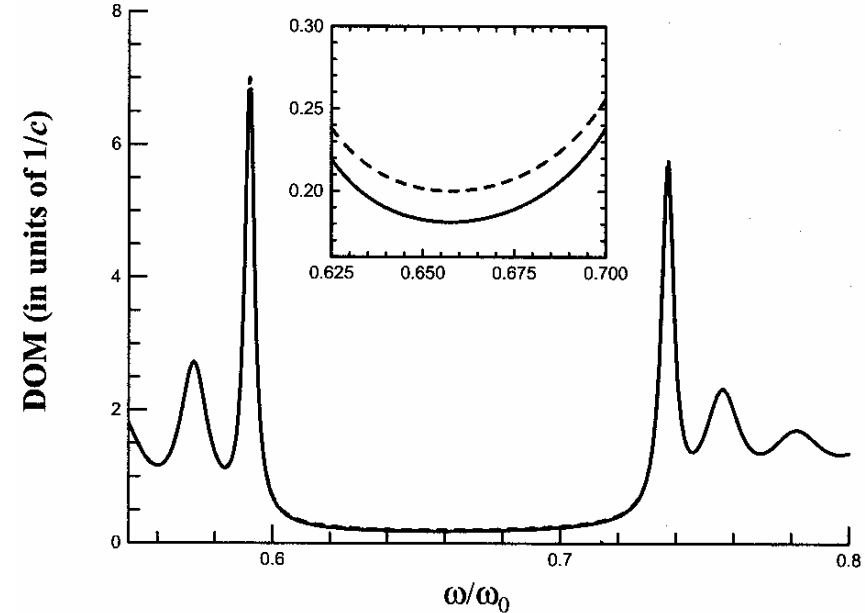
эффективная плотность фотонных мод:

$$\rho_{\omega} \equiv \frac{1}{2Lc} \int_0^L \left[\varepsilon_{\omega}(z) |\Phi_{\omega}(z)|^2 + \frac{c^2}{\omega^2} \left| \frac{d\Phi_{\omega}(z)}{dz} \right|^2 \right] dz$$

смысл - усредненная по размеру фотонного кристалла плотность энергии электромагнитной волны, нормированная на плотность энергии падающей волны и выраженная в единицах $1/c$

используя граничные условия :

$$\rho_{\omega} = \frac{1}{Lc} \int_0^L \varepsilon_{\omega}(z) |\Phi_{\omega}(z)|^2 dz - \frac{1}{L\omega} \text{Im}(r_{\omega})$$



Эффективный закон дисперсии и показатель преломления конечного фотонного кристалла

Действительная часть эффективного закона дисперсии, $k_r(\omega)$, находится как решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{dk_r(\omega)}{d\omega} = \rho_\omega, \text{ при } k_r(\omega) = 0$$

Мнимая часть эффективного закона дисперсии, $k_i(\omega)$, может быть найдена из соотношения Крамерса-Кронига, связанного с принципом причинности:

$$k_i(\omega) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\Omega k_r(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega$$

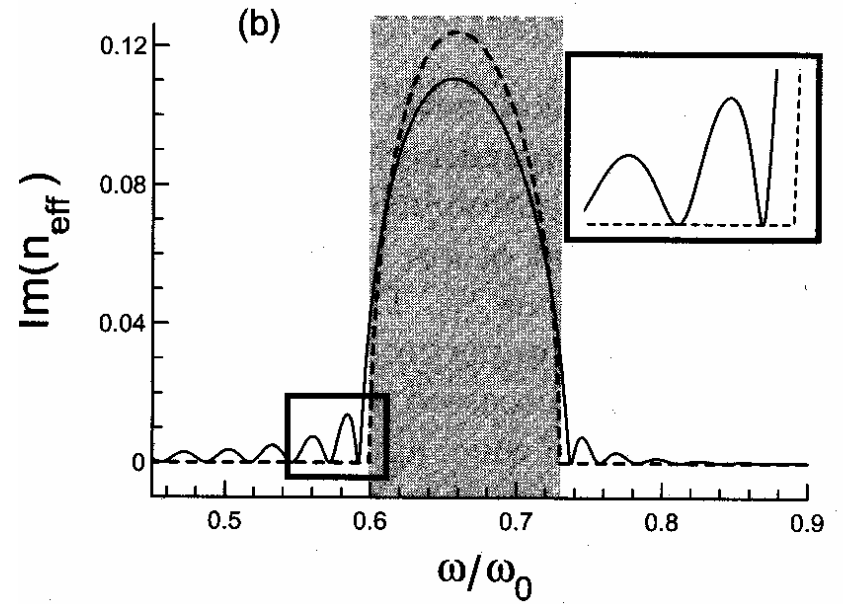
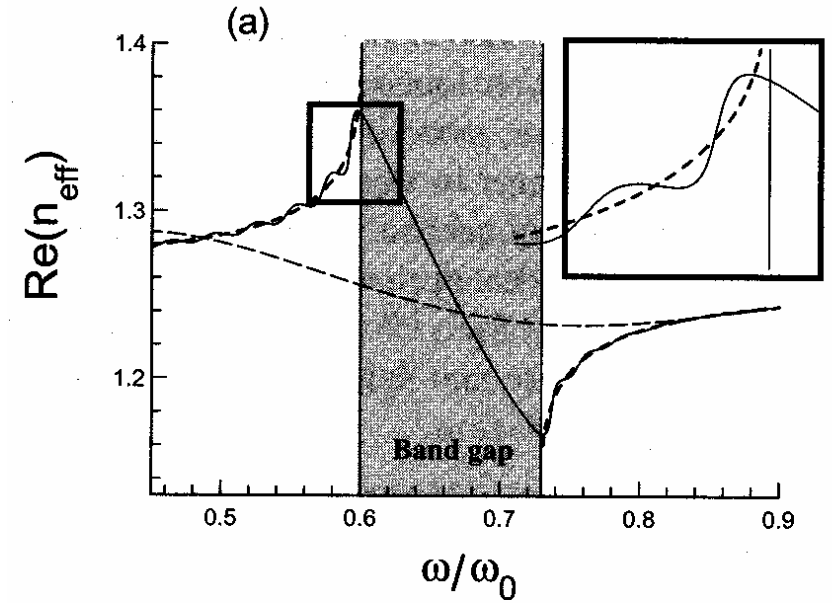
при условии $k_r(-\omega) = -k_r(\omega)$

эффективный закон дисперсии конечного одномерного фотонного кристалла:

$$k_{eff}(\omega) = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$$

k_{eff} можно сопоставить эффективный показатель преломления n_{eff} :

$$k_{eff}(\omega) = \frac{\omega}{c} n_{eff} = \frac{\omega}{c} (n_r(\omega) + in_i(\omega))$$



Метод эффективной среды при описании генерации оптических гармоник в фотонных кристаллах

в приближении медленно меняющихся во времени амплитуд

(временная эволюция волнового пакета происходит существенно медленнее периода электромагнитной волны)

Введем новые переменные $\Omega = \omega/\omega_0$, $\xi = z/\lambda_0$, $\tau = ct/\lambda_0$

пространственная переменная z нормирована в единицах центральной длины волны пакета λ_0 , а частота - в единицах центральной частоты $\omega_0 = 2\pi/\lambda_0$

Связанные уравнения для излучений накачки и второй гармоники в новых переменных примут вид:

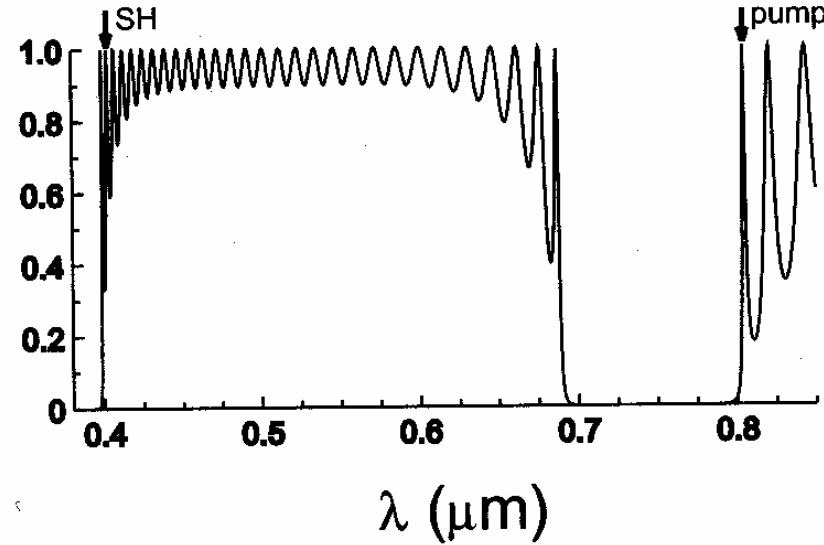
$$\begin{aligned}\varepsilon_\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} E_\Omega(\xi, \tau) &= \frac{i}{4\pi\Omega} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} E_\Omega - \frac{\partial}{\partial \xi} E_\Omega + i\pi(\varepsilon_\Omega - 1)\Omega E_\Omega + i8\pi^2\Omega\chi^{(2)} E_{2\Omega} E_\Omega^*, \\ \varepsilon_{2\Omega} \frac{\partial}{\partial \tau} E_{2\Omega}(\xi, \tau) &= \frac{i}{4\pi 2\Omega} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} E_{2\Omega} - \frac{\partial}{\partial \xi} E_{2\Omega} + i\pi(\varepsilon_{2\Omega} - 1)2\Omega E_{2\Omega} + i8\pi^2 2\Omega\chi^{(2)} E_\Omega^2\end{aligned}$$

Укороченные уравнения для метода эффективной среды

Система связанных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие в однородном материале длиной L с эффективным законом дисперсии $n_{eff}(\omega)$:

$$\frac{d}{dz} A_\omega = i \frac{\omega}{n_r(\omega)c} d_{eff} A_{2\omega} A_\omega^* e^{i\Delta k_{eff} z},$$

$$\frac{d}{dz} A_{2\omega} = i \frac{\omega}{n_r(2\omega)c} d_{eff} A_\omega^2 e^{-i\Delta k_{eff} z}$$



! приближение взаимодействия двух монохроматических волн с частотами ω и 2ω , настроенные на пики пропускания, где $n_i = n(\omega)$

эффективная фазовая расстройка $\Delta k_{eff} = k_r(2\omega) - 2k_r(\omega)$

эффективная восприимчивость для нелинейного взаимодействия $d_{eff} = \frac{1}{L} \int_0^L \chi^{(2)}(z) |\Phi_\omega(z)|^2 |\Phi_{2\omega}(z)| dz$

в пике пропускания $\rho = \frac{1}{Lc} \int_0^L \varepsilon_\omega(z) |\Phi_\omega(z)|^2 dz$

поэтому $d_{eff} \propto \rho_\omega \chi_{eff}^{(2)}$

Эффективность генерации второй гармоники

в приближении заданной накачки эффективность генерации второй гармоники имеет вид:

$$\eta = \frac{8\pi^2 d_{eff}^2 L^2 I_{pump}}{n_r^2(\omega) n_r(2\omega) c \lambda^2} \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta k_{eff} L}{2} \right)$$

$$I_{pump} = \frac{1}{2} c n_r(\omega) |A_\omega|^2$$

точно в резонансе пропускания

$$\eta \approx \left[\rho_\omega \chi_{eff}^{(2)} L \right] I_{pump} \text{sinc}^2 \left(\frac{\Delta k_{eff} L}{2} \right)$$

или

$$\eta \approx L^2 \left[\frac{d_{eff}}{\chi_{eff}^{(2)}} \right]^2 I_{pump} \text{sinc}^2 \left(\frac{L}{2L_c} \right)$$

при $L_c = 1/\Delta k_{eff}$

