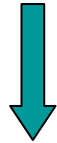


Оптический отклик фотонных кристаллов

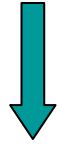
1. Постановка задачи об оптическом отклике фотонных кристаллов
2. Неоднородное волновое уравнение в фотонных кристаллах и его решение
3. Запаздывающие функции Грина
4. Спонтанное излучение фотонных кристаллов

Постановка задачи об оптическом отклике фотонных кристаллов

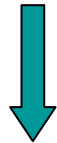
задача о распространении света
в фотонных кристаллах



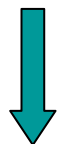
уравнения Максвелла и переход
к однородному волновому уравнению



задача о возможных состояниях поля -
зона Бреллиэна фотонного кристалла



задача о собственных значениях волнового
уравнения – характеристическое уравнение –
зонная структура фотонного кристалла



задача о собственных функциях волнового
уравнения – отражение и пропускание света,
двух- и трехмерная дифракция света в фотонных
кристаллах

задача об отклике
фотонных кристаллов



наведенная поляризация, уравнения Максвелла
и переход к неоднородному волновому уравнению



задача о решении неоднородного волнового
уравнения с точечным источником -
функция Грина фотонного кристалла



задача о наведенной поляризации
в фотонном кристалле



решение неоднородного волнового
уравнения с наведенной поляризацией -
свертка с функцией Грина

Задачи об оптическом отклике фотонных кристаллов

1. спонтанное излучение в фотонных кристаллах

- спонтанное излучение атомов (примеси) в фотонных кристаллах
- дипольное излучение фотонных кристаллов

2. вынужденное излучение в фотонных кристаллах

- усиление вынужденного излучения в фотонных кристаллах
- создание инверсной населенности атомов (примесей) в фотонных кристаллах
- проблема лазерной генерации в фотонных кристаллах

3. нелинейно-оптический отклик фотонных кристаллов

- параметрические процессы на квадратичной восприимчивости (генерация второй гармоники, суммарной и разностной частот)
- параметрические процессы на кубичной восприимчивости (четырёхволновое смешение и генерация гармоник, распространение солитонов, оптическое выпрямление)
- непараметрические процессы (резонансное двух- и много фотонное поглощение, резонансное комбинационное рассеяние)

NB: рамки приближения заданного поля

Уравнения Максвелла в фотонных кристаллах с наведенной поляризацией

уравнения Максвелла в среде
с наведенной поляризацией $\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)), \\ \nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}$$

полагаем $\mu = 1$, $\varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \varepsilon(\mathbf{r})$

введем векторную функцию $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) \equiv \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

и дифференциальный оператор $W \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \nabla \times \left(\nabla \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) \right)$

(эрмитов, собственные функции ортогональны, полное множество)

исключая из уравнений Максвелла магнитную компоненту поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$

получим неоднородное волновое уравнение для $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$

Неоднородное волновое уравнение в фотонных кристаллах

получим неоднородное волновое уравнение

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + W \right) \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = - \frac{1}{c^2 \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)$$

введем собственные функции оператора W ,
отвечающие плоским поперечным волнам

определим $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r})$ как решения уравнения

$$W \mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_{\mathbf{k}n}^{(T)2}}{c^2} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r})$$

$\omega_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r})$ - собственные частоты, соответствующие собственным функциям $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r})$

Условие нормировки собственных функций:

$$\int_V d\mathbf{r} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)*}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{k}'n'}^{(T)}(\mathbf{r}) = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{nn'}$$

V - объем фотонного кристалла

Функция Грина фотонного кристалла (1)

общий вид частного решения неоднородного волнового уравнения:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \frac{1}{c^2 \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t')$$

$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')$ - тензорная функция Грина фотонного кристалла

по определению, функция Грина является решением неоднородного волнового уравнения

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + W \right) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = -\mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

\mathbf{I} - единичный оператор

принцип причинности: $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0, \quad t < 0$

$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0$ конструируется из $\mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r})$

Функция Грина фотонного кристалла (2)

перейдем от функции $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ во временном пространстве

к функции $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ в частотном:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) e^{-i\omega t}$$

$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ - удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - W \right) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

и записывается в виде:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{c^2}{V} \sum_{\mathbf{kn}} \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}')}{\left(\omega - \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} + i\delta \right) \left(\omega + \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} + i\delta \right)}$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \frac{c^2}{2\pi V} \sum_{\mathbf{kn}} \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}')}{2\omega_{\mathbf{kn}}^{(T)}} \int_C \left(\frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} + i\delta} - \frac{1}{\omega + \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} + i\delta} \right) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{c^2}{2\pi V} \sum_{\mathbf{kn}} \frac{\sin \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} t}{\omega_{\mathbf{kn}}^{(T)}} \mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

Общее решение неоднородного волнового уравнения (1)

Итак, общий вид частного решения неоднородного волнового уравнения, записываемого в виде:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \frac{1}{c^2 \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t')$$

запишется в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{kn}} \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\sin \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)}(t - t')}{\omega_{\mathbf{kn}}^{(T)}} \mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \\ & \times \mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}') \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t') \end{aligned}$$

(! верхний предел интегрирования по времени)

Общее решение неоднородного волнового уравнения (2)

окончательно (после свертки с функцией Грина),
решение волнового уравнения записывается в виде

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} +$$

$$+ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{kn}} \mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r}) \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t')}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} \sin \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)}(t - t')$$

или через амплитуды электромагнитных полей:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon(\mathbf{r})} =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{kn}} \mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r}) \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t') \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} \sin \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)}(t - t')$$

Замечания.

1. наведенная поляризация включалась адиабатически, момент времени $t = -\infty$ система не чувствует
2. поглощение пренебрежимо мало, эффекты, связанные с диссипацией исключены из рассмотрения

Спонтанное излучение фотонных кристаллов

рассмотрим точечный диполь:

\mathbf{d} -дипольный момент (от времени не зависит – «заданное поле»)

ω - частота колебаний диполя

поляризация диполя $\mathbf{P}_d(\mathbf{r}, t) = \mathbf{d}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)e^{-i\omega t + \delta t}$

$e^{\delta t}$ - обеспечивает адиабатическое включение поляризации

поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon(\mathbf{r})} &= \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{kn}} \mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r}) \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t') \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} \sin \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)}(t - t') \end{aligned}$$

то поле излучения диполя

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{P}_d(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon(\mathbf{r})} &= \frac{e^{-i\omega t}}{2V} \sum_{\mathbf{kn}} \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} \mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)}(\mathbf{r}) \left(\mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\omega + \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} + i\delta} - \frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)} + i\delta} \right) \end{aligned}$$

Поток энергии спонтанного излучения фотонных кристаллов

введем вектор Пойтинга для излучения диполя:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = [(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)) \times (\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t))]$$

усредненное по времени значение вектора Пойтинга:

$$\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} = \overline{[(\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_d^*(\mathbf{r}, t)) \times (\mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_d^*(\mathbf{r}, t))]}$$

или
 $e^{-i\omega t}$ 

$$\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} = [\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_d^*(\mathbf{r}, t)] + [\mathbf{E}_d^*(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t)]$$

вычислим дивергенцию вектора Пойтинга

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} &= (\mathbf{H}_d^* \cdot [\nabla \times \mathbf{E}_d]) - (\mathbf{E}_d \cdot [\nabla \times \mathbf{H}_d^*]) + \\ &\quad + (\mathbf{H}_d \cdot [\nabla \times \mathbf{E}_d^*]) - (\mathbf{E}_d^* \cdot [\nabla \times \mathbf{H}_d]). \end{aligned}$$

поскольку из уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t) = (-i\omega) (\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_d(\mathbf{r}, t))$$

$$\mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t)$$


то, окончательно,

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} = i\omega (\mathbf{E}_d^* \cdot \mathbf{P}_d - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{P}_d^*)$$

Плотность энергии спонтанного излучения фотонных кристаллов

или

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} = \frac{\pi\omega^2}{V} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \sum_{\mathbf{kn}} |\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}_0)|^2 \delta(\omega - \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)})$$


 ← плотность мод

Энергия спонтанного излучения осциллирующего диполя задается в виде:

$$\begin{aligned} U &= \int_{S_1} \overline{S_n(\mathbf{r}, t)} dS = \int_{V_1} \nabla \cdot \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} = \\ &= \frac{\pi\omega^2}{V} \sum_{\mathbf{kn}} |\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}_0)|^2 \delta(\omega - \omega_{\mathbf{kn}}^{(T)}) = \\ &= \frac{\pi\omega^2}{V} |\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{kn}}^{(T)*}(\mathbf{r}_0)|^2 D(\omega) \end{aligned}$$

S_1 - площадь малой поверхности объемом V_1 , окружающая диполь

$D(\omega)$ - плотность фотонных мод в интервале $[\omega, \omega + d\omega]$