Оптический отклик фотонных кристаллов

1. Постановка задачи об оптическом отклике фотонных кристаллов
2. Неоднородное волновое уравнение в фотонных кристаллах и его решение
3. Запаздывающие функции Грина
4. Спонтанное излучение фотонных кристаллов

Постановка задачи об оптическом отклике фотонных кристаллов

задача о распространении света в фотонных кристаллах

уравнения Максвелла и переход
к однородному волновому уравнению

задача о возможных состояния поля -
зона Брюллиэна фотонного кристалла

задача о собственных значениях волнового
уравнения – характеристическое уравнение –
зонная структура фотонного кристалла

задача о собственных функциях волнового
уравнения – отражение и пропускание света,
двух- и трехмерная дифракция света в фотонных
кристаллах

задача об отклике фотонных кристаллов

наведенная поляризация, уравнения Максвелла
и переход к неоднородному волновому уравнению

задача о решении неоднородного волнового
уравнения с точечным источником -
функция Грина фотонного кристалла

задача о наведенной поляризации
в фотонном кристалле

решение неоднородного волнового
уравнения с наведенной поляризацией -
свертка с функцией Грина

Задачи об оптическом отклике фотонных кристаллов

1. спонтанное излучение в фотонных кристаллах

   - спонтанное излучение атомов (примеси) в фотонных кристаллах
   - дипольное излучение фотонных кристаллов

2. вынужденное излучение в фотонных кристаллах

   - усиление вынужденного излучения в фотонных кристаллах
   - создание инверсной населенности атомов (примесей) в фотонных кристллах
   - проблема лазерной генерации в фотонных кристаллах

3. нелинейно-оптический отклик фотонных кристаллов

   - параметрические процессы на квадратичной восприимчивости (генерация второй гармоники, суммарной и разностной частот)
   - параметрические процессы на кубичной восприимчивости (четырехволновое смешение и генерация гармоник, распространение солитонов, оптическое выпрямление)
   - непараметрические процессы (резонансное двух- и много фотонное поглощение, резонансное комбинационное рассеяние)

NB: рамки приближения заданного поля

Уравнения Максвелла в фотонных кристаллах с наведенной поляризацией

уравнения Максвелла в среде
с наведенной поляризацией $\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)\right),$$

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)\right) = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$$

полагаем $\mu = 1, \quad \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \varepsilon(\mathbf{r})$

введем векторную функцию $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) \equiv \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

и дифференциальный оператор $W\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}}\nabla \times \left(\nabla \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}}\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)\right)$

(эрмитов, собственные функции ортогональны, полное множество)

исключая из уравнений Максвелла магнитную компоненту поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$

получим неоднородное волновое уравнение для $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$

Неоднородное волновое уравнение в фотонных кристаллах

получим неоднородное волновое уравнение

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + W\right)\mathbf{Q}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c^2\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r},t)$$

введем собственные функции оператора W,
отвечающие плоским поперечным волнам

определим $\mathbf{Q}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})$ как решения уравнения

$$W\mathbf{Q}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^{(T)2}_{\mathbf{k}n}}{c^2}\mathbf{Q}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})$$

$\omega^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})$ - собственные частоты, соответствующие собственным функциям $\mathbf{Q}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})$

Условие нормировки собственных функций:

$$\int_V d\mathbf{r}\mathbf{Q}^{(T)\star}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{Q}^{(T)}_{\mathbf{k}'n'}(\mathbf{r}) = V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{nn'}$$

V - объем фотонного кристалла

Функция Грина фотонного кристалла (1)

общий вид частного решения неоднородного волнового уравнения:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r},t) = \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t') \frac{1}{c^2\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}',t')$$

$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t')$ - тензорная функция Грина фотонного кристалла

по определению, функция Грина является решением неоднородного волнового уравнения

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + W\right)\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t') = -\mathbf{I}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

$\mathbf{I}$ - единичный оператор

принцип причинности: $\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = 0, \quad t < 0$

$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = 0$ конструируется из $\mathbf{Q}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})$

Функция Грина фотонного кристалла (2)

перейдем от функции $\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$ во временном пространстве

к функции $\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ в частотном:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) e^{-i\omega t}$$

$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ - удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - W\right)\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \mathbf{I}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

и записывается в виде:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \frac{c^2}{V}\sum_{\mathbf{k}n}\frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)\star}(\mathbf{r}')}{\left(\omega - \omega_{\mathbf{k}n}^{(T)} + i\delta\right)\left(\omega + \omega_{\mathbf{k}n}^{(T)} + i\delta\right)}$$

тогда

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \frac{c^2}{2\pi V}\sum_{\mathbf{k}n}\frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)\star}(\mathbf{r}')}{2\omega_{\mathbf{k}n}^{(T)}}\int_C \left(\frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{k}n}^{(T)} + i\delta} - \frac{1}{\omega + \omega_{\mathbf{k}n}^{(T)} + i\delta}\right) e^{-i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{c^2}{2\pi V}\sum_{\mathbf{k}n}\frac{\sin\omega_{\mathbf{k}n}^{(T)} t}{\omega_{\mathbf{k}n}^{(T)}}\mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)\star}(\mathbf{r}')$$

Общее решение неоднородного волнового уравнения (1)

Итак, общий вид частного решения неоднородного волнового уравнения, записываемого в виде:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r},t) = \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t') \frac{1}{c^2\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}',t')$$

запишется в виде:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}n} \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{\sin \omega_{\mathbf{k}n}^{(T)}(t-t')}{\omega_{\mathbf{k}n}^{(T)}} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)}(\mathbf{r}) \times$$
$$\times \mathbf{Q}_{\mathbf{k}n}^{(T)\star}(\mathbf{r}') \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}',t')$$

(! верхний предел интегрирования по времени)

Общее решение неоднородного волнового уравнения (2)

окончательно (после свертки с функцией Грина),
решение волнового уравнения записывается в виде

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r},t)}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} +$$

$$+\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}n}\mathbf{Q}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})\int_V d\mathbf{r}'\int_{-\infty}^{t} dt'\,\frac{\mathbf{Q}^{(T)\star}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}',t')}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}}\omega^{(T)}_{\mathbf{k}n}\sin\omega^{(T)}_{\mathbf{k}n}(t-t')$$

или через амплитуды электромагнитных полей:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r},t)}{\varepsilon(\mathbf{r})} =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}n}\mathbf{E}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})\int_V d\mathbf{r}'\int_{-\infty}^{t} dt'\,\mathbf{E}^{(T)\star}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}',t')\omega^{(T)}_{\mathbf{k}n}\sin\omega^{(T)}_{\mathbf{k}n}(t-t')$$

Замечания.

1. наведенная поляризация включалась адиабатически, момент времени $t=-\infty$ система не чувствует
2. поглощение пренебрежимо мало, эффекты, связанные с диссипацией исключены из рассмотрения

Спонтанное излучение фотонных кристаллов

рассмотрим точечный диполь:

$\mathbf{d}$ -дипольный момент (от времени не зависит – «заданное поле»)

ω - частота колебаний диполя

поляризация диполя $\mathbf{P}_d(\mathbf{r},t) = \mathbf{d}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)e^{-i\omega t+\delta t}$

$e^{\delta t}$ - обеспечивает адиабатическое включение поляризации

поскольку

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r},t)}{\varepsilon(\mathbf{r})} =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}n} \mathbf{E}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) \int_V d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} dt' \mathbf{E}^{(T)\star}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}',t')\omega^{(T)}_{\mathbf{k}n} \sin \omega^{(T)}_{\mathbf{k}n}(t-t')$$

то поле излучения диполя

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r},t) + \frac{\mathbf{P}_d(\mathbf{r},t)}{\varepsilon(\mathbf{r})} = \frac{e^{-i\omega t}}{2V}\sum_{\mathbf{k}n} \omega^{(T)}_{\mathbf{k}n} \mathbf{E}^{(T)}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) \left(\mathbf{E}^{(T)\star}_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\omega + \omega^{(T)}_{\mathbf{k}n} + i\delta} - \frac{1}{\omega - \omega^{(T)}_{\mathbf{k}n} + i\delta} \right)$$

Поток энергии спонтанного излучения фотонных кристаллов

введем вектор Пойтинга для излучения диполя:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = [(\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^\star(\mathbf{r},t)) \times (\mathbf{H}(\mathbf{r},t) + \mathbf{H}^\star(\mathbf{r},t))]$$

усредненное по времени значение вектора Пойтинга:

$$\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)} = \overline{[(\mathbf{E}_d(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}_d^\star(\mathbf{r},t)) \times (\mathbf{H}_d(\mathbf{r},t) + \mathbf{H}_d^\star(\mathbf{r},t))]}$$

или

$e^{-i\omega t}$

$$\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)} = [\mathbf{E}_d(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}_d^\star(\mathbf{r},t)] + [\mathbf{E}_d^\star(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}_d(\mathbf{r},t)]$$

вычислим дивергенцию вектора Пойтинга

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)} = (\mathbf{H}_d^\star \cdot [\nabla \times \mathbf{E}_d]) - (\mathbf{E}_d \cdot [\nabla \times \mathbf{H}_d^\star]) + \\ + (\mathbf{H}_d \cdot [\nabla \times \mathbf{E}_d^\star]) - (\mathbf{E}_d^\star \cdot [\nabla \times \mathbf{H}_d]) \,.$$

поскольку из уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H}_d(\mathbf{r},t) = (-i\omega)\,(\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}_d(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}_d(\mathbf{r},t))$$

$$\mathbf{H}_d(\mathbf{r},t) = \frac{1}{i\omega}\nabla \times \mathbf{E}_d(\mathbf{r},t)$$

то, окончательно,

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)} = i\omega\,(\mathbf{E}_d^\star \cdot \mathbf{P}_d - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{P}_d^\star)$$

Плотность энергии спонтанного излучения фотонных кристаллов

или

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)} = \frac{\pi\omega^2}{V}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\sum_{\mathbf{k}n}|\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}^{(T)\star}(\mathbf{r}_0)|^2\delta\left(\omega-\omega_{\mathbf{k}n}^{(T)}\right)$$

плотность мод

Энергия спонтанного излучения осциллирующего диполя задается в виде:

$$U = \int_{S_1}\overline{S_n(\mathbf{r},t)}dS = \int_{V_1}\nabla\cdot\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)}d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{\pi\omega^2}{V}\sum_{\mathbf{k}n}|\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}^{(T)\star}(\mathbf{r}_0)|^2\delta\left(\omega-\omega_{\mathbf{k}n}^{(T)}\right) =$$

$$= \frac{\pi\omega^2}{V}\overline{|\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}^{(T)\star}(\mathbf{r}_0)|^2}D(\omega)$$

S_1 - площадь малой поверхности объемом V_1, окружающая диполь

$D(\omega)$ - плотность фотонных мод в интервале $[\omega,\omega+d\omega]$