

## Лекция 3-4.

### Нелинейная оптика с участием поверхностных электромагнитных волн

#### 1. Поверхностные электромагнитные волны (ПЭВ).

Поверхностные электромагнитные волны (ПЭВ) - распространяющиеся вдоль границы раздела двух сред электромагнитные волны (ЭМ) волны, причём их амплитуды затухают экспоненциально при удалении от границы.

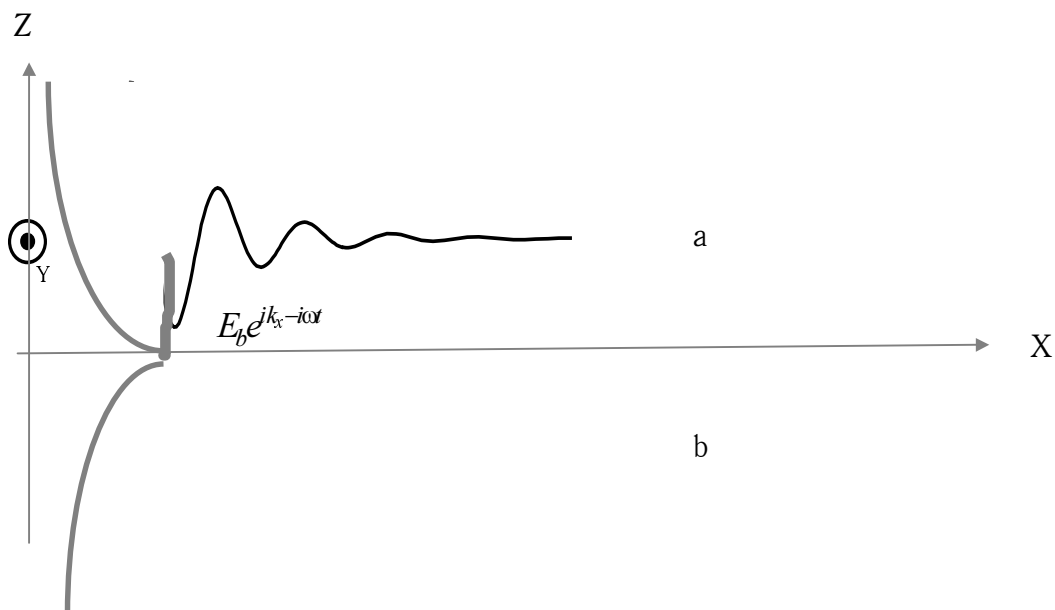


Рис. 3.1. Плоская граница между двумя полубесконечными кубичными или изотропными средами.

Ниже будет видно, что ПЭВ - это поперечная магнитная (ТМ) волна.

Сначала положим, что ПЭВ существует и для ТЕ и для ТМ поляризаций. Для ТМ поверхностная волна может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\mathbf{x}E_{ax} + zE_{az})e^{ik_x - \alpha_a z - i\omega t}, & z > 0 \\ \mathbf{E} &= (\mathbf{x}E_{bx} + zE_{bz})e^{ik_x + \alpha_b z - i\omega t}, & z < 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Чтобы удовлетворять волновому уравнению,  $k$  и  $\alpha$  связаны соотношениями:

$$k^2 - \alpha_a^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_a \quad \text{в среде a } (z > 0), \quad (3.2)$$

$$k^2 - \alpha_b^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_b \quad \text{в среде b } (z < 0). \quad (3.3)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям при  $z = 0$ , нужно потребовать, чтобы

$$\begin{aligned} E_{ax} &= E_{bx} , \\ \varepsilon_a E_{az} &= \varepsilon_b E_{bz} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  в обеих средах, эти граничные условия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E_{ax} &= E_{bx} , \\ \varepsilon_a \frac{ik}{\alpha_a} E_{ax} &= \varepsilon_b \left( -\frac{ik}{\alpha_b} \right) E_{bx} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для существования ненулевых  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{y}$   $E_{ax}$  и  $E_{bx}$  определитель системы должен быть равен нулю. Это даёт соотношение  $\varepsilon_a \alpha_b + \varepsilon_b \alpha_a = 0$ , из которого с учётом (3.2, 3.3) получаем:

$$k^2 = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\varepsilon_a \varepsilon_b}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} \quad (3.6)$$

Для существования ПЭВ необходимо, чтобы  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  были вещественными и положительными ( тогда  $\exp$  спадает вглубь ), и значит  $k^2 > \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_a$ , и

$$k^2 > \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_b .$$

Тогда, если смотреть на дисперсионные соотношения (3.6), то видно, что они могут выполняться только в случаях:

$$\varepsilon_a < 0 \text{ и } |\varepsilon_a| > \varepsilon_b \text{ или } \varepsilon_b < 0 \text{ и } |\varepsilon_b| > \varepsilon_a .$$

Т.е. одна из сред должна иметь отрицательную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ , что возможно либо в области резонансов: фоновые полосы, экситонные резонансы, либо в металлах для частот меньших плазменной частоты.

Всё можно повторить (дома) и для ТЕ волны ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{y}$ ) и получить, что дисперсионных соотношений для ПЭВ не существует. Т.е. ТЕ не могут распространяться как поверхностные волны.

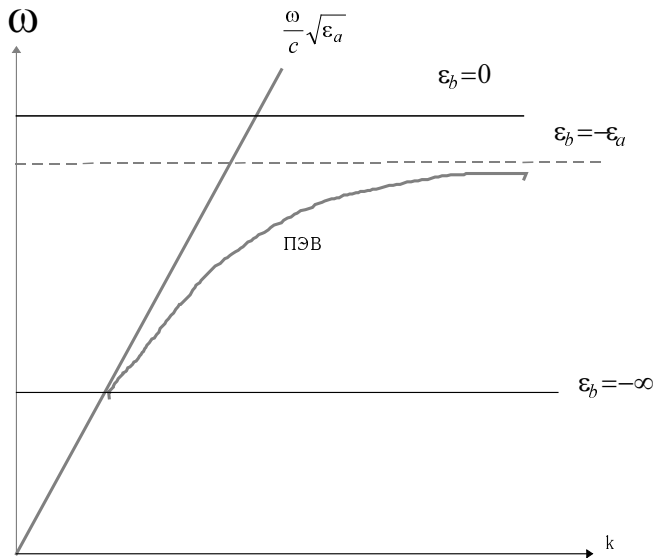


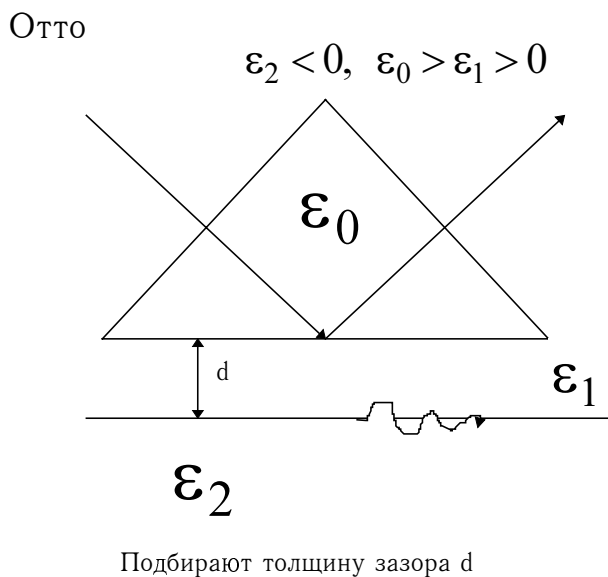
Рис. 3.2. Дисперсионные кривые для ППВ для случая  $\epsilon_b(\omega)$ ,  $\epsilon_a = const$ .

Объёмные ЭМ волна не может возбудить ППВ на плоской границе двух полубесконечных сред. И наоборот, ППВ не может излучаться, т.е. переходить в объёмную ЭМ волну. Это и есть признак существования ППВ как дополнительных собственных ЭМ мод неоднородной задачи.

Поверхностные волны можно возбудить, используя возможности согласования законов дисперсии ППВ и объёмных электромагнитных волн:

### 1. Метод Отто.

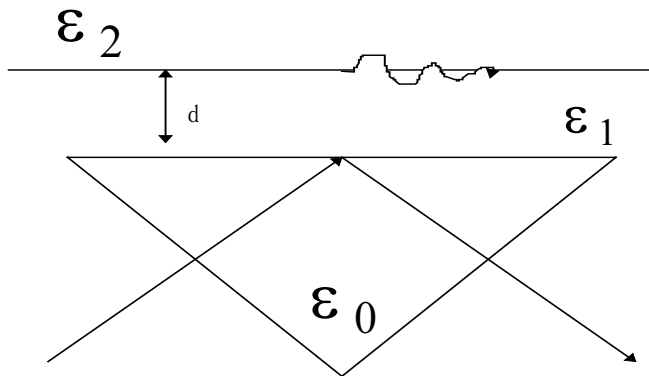
Рис. 3.3. Схема метода Отто.



### 2. Метод Кречмана:

Кретчманн

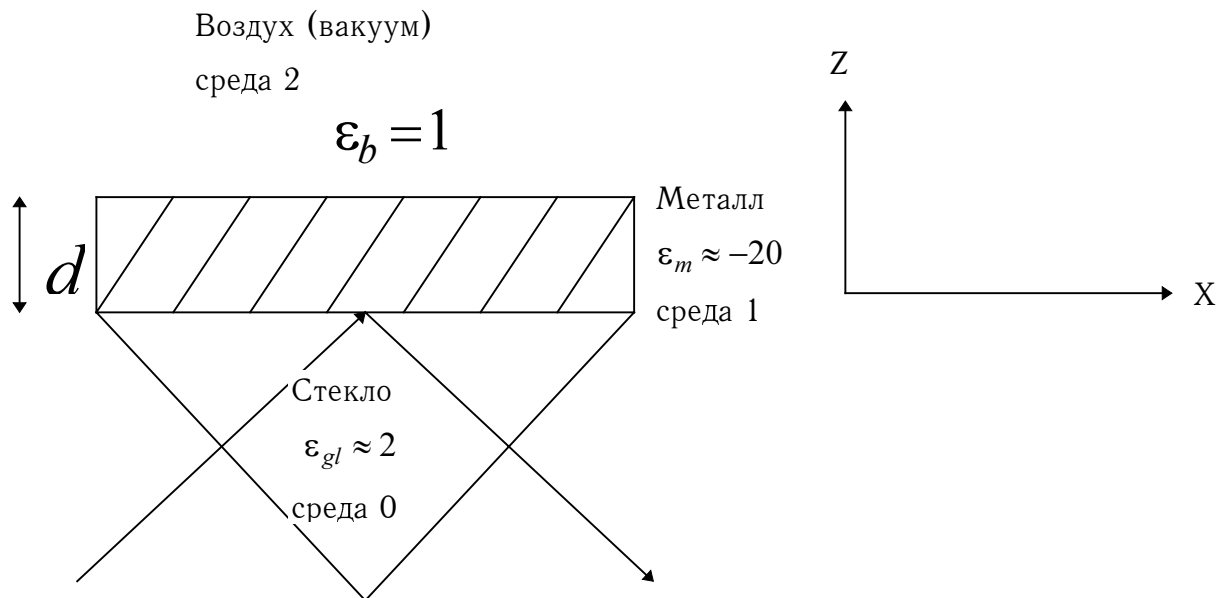
$$\epsilon_1 < 0, \epsilon_0 > \epsilon_2 > 0$$



Подбирают толщину d плёнки

Рис. 3.4. Схема метода Кретчмана.

**Кретчманн**



Падающая из призмы на границу раздела объёмная ТМ волна вида :

$$\mathbf{E}_0 = \left( \mathbf{x} - \mathbf{z} \frac{k_x}{k_{0z}} \right) E_{0x} \exp(ik_x x + ik_{0z} z - i\omega t)$$

приводит к появлению проходящей и отражённой объёмных (пока) волн ( т.е. пока решаем Френелевскую задачу для границы) :

$$\mathbf{E}_T = \left( \mathbf{x} - z \frac{k_x}{k_{2z}} \right) E_{Tx} \exp(ik_x x + ik_{2z} z - i\omega t)$$

$$\mathbf{E}_R = \left( \mathbf{x} + z \frac{k_x}{k_{0z}} \right) E_{Rx} \exp(ik_x x - ik_{0z} z - i\omega t)$$

где  $E_{Tx} = [t_{01}t_{12} \exp(ik_{1z}d)] \frac{k_{2z}^2 \varepsilon_0}{k_{0z}^2 \varepsilon_2} \frac{E_{0x}}{D}$

$$E_{Rx} = [r_{01} + r_{12} \exp(i2k_{1z}d)] \frac{E_{0x}}{D} \quad (3.7)$$

$$D = 1 + r_{01}r_{12} \exp(i2k_{1z}d)$$

где  $r_{01}, r_{12}, t_{01}, t_{12}$  коэффициенты Френеля, определяемые выражениями

$$r_{ij} = \frac{\varepsilon_j k_{iz} - \varepsilon_i k_{jz}}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}}, \quad t_{ij} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j} k_{iz}}{\varepsilon_j k_{iz} + \varepsilon_i k_{jz}}.$$

Уравнения (3.7) показывают, что при  $D=0$  решение имеет резонансный характер. Это возможно, только если  $k_{1z}$  или  $\varepsilon_1 < 0$  - это указывает на возможный резонанс для ПЭВ (считаем  $\text{Im} \varepsilon_1 = 0$ ). Условие  $D=0$  можно переписать как дисперсионное соотношение для ПЭВ:

$$\text{th}(\beta_1 d) - \frac{q_0 q_1 + q_1 q_2}{q_1^2 + q_0 q_2} = 0, \quad (3.8)$$

где  $\beta_1 \equiv ik_{1z}$ ,  $q_i = \frac{k_{iz}}{\varepsilon_i} = \frac{[(\omega/c)^2 \varepsilon_i - k_x^2]^{1/2}}{\varepsilon_i}$ .

В пределе  $\beta_1 d \gg 1$  из (3.8) получим выражение

$$\left[ k_x^2 - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \right] \left[ k_x^2 - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] = 0, \quad (3.9)$$

два множителя в котором соответствуют дисперсионным соотношениям для двух ПЭВ, бегущих по границам "0/1" и "1/2".

Условие  $D=0$  справедливо для действительного  $\varepsilon$  плёнки. Это условие в первую очередь определяет ДС для ПЭВ. На практике  $\varepsilon_{film}$  комплексно и резонансный знаменатель  $D$  конечен. Тогда соотношения для амплитуд  $E_R$  и  $E_T$  можно использовать для нахождения интенсивности возбуждения ПЭВ.

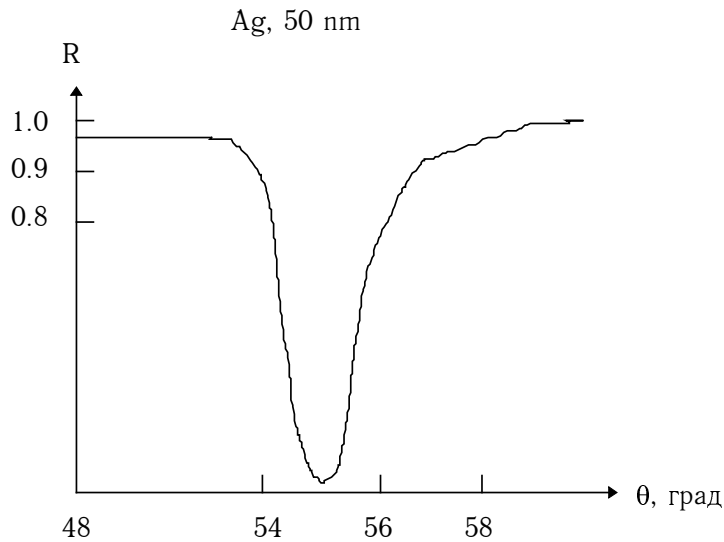


Рис. 3.5. Экспериментальная зависимость коэффициента отражения света от серебряной пленки в схеме Кречмана.

В ПЭВ амплитуда напряжённости поля в ПЭВ сильно возрастает по сравнению с напряжённостью поля в объёмной ЭМ волне. На это есть две причины :

- ПЭВ медленнее объёмной ЭВ.
- Энергия прижата к поверхности.

Возрастание  $E$  в ПЭВ ограничивается только потерями (мнимая часть  $k_x$ ). Точное распределение поля в плёнке можно найти из решения волнового уравнения. При  $0 \leq z \leq d$  имеем:

$$\mathbf{E}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}[A \cos(k_{1z}z) + B \sin(k_{1z}z)] + \\ + z(ik_x/k_{1z})[-A \sin(k_{1z}z) + B \cos(k_{1z}z)] \end{array} \right\} \exp(ik_x x - i\omega t), \quad (3.10)$$

$$A = (1 + r_{01})[1 + r_{12} \exp(i2k_{1z}d)] \frac{E_{0x}}{D},$$

$$B = (1 - r_{01})[1 - r_{12} \exp(i2k_{1z}d)] \frac{E_{0x}}{D} \frac{i\varepsilon_0 k_{1z}}{\varepsilon_1 k_{0z}}.$$

-

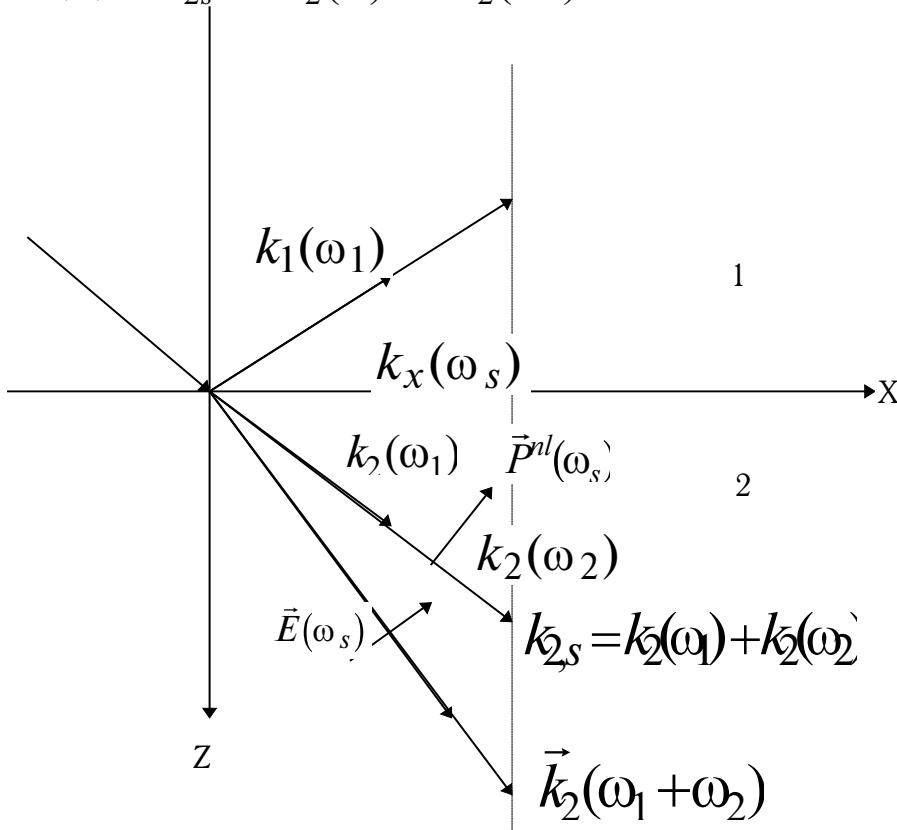
$$\left[ \nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega_s^2}{c^2} \varepsilon(z) \right] \mathbf{E}(\omega_s) = \frac{4\pi\omega_s^2}{c^2} \mathbf{P}^{nl}(\omega_s), \quad (3.11)$$

$\omega_s = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_s = 2\omega$   $\epsilon(z)$ ,  $z$  ( ). Результирующее поле  $E(\omega_s)$ ,  $E(\omega_1)$ ,  $E(\omega_2)$ ,  $E(\omega)$ ,  $\dots$ ,  $\dots$ .  
: 1 ( $Z < 0$ ) 2 ( $Z > 0$ ).

$$P^{nl}(\omega_s) = 0 \quad 1. \quad - \quad \omega \quad 2 : \\ P^{nl}(\omega_s) = \mathbf{x}P_x^{nl}(\omega_s) + \mathbf{z}P_z^{nl}(\omega_s) \propto \exp(i\mathbf{k}_{2s}\mathbf{r} - i\omega_s t), \quad (3.12)$$

$$k_{2s} = k_2(\omega_1) + k_2(\omega_2), \\ \text{""}, \quad k_2(\omega_1 + \omega_2).$$

$$, \quad k_{2s} = 2k_2(\omega) \quad k_2(2\omega) \quad \text{("")}$$



3.6. , .

$$k_x \quad 1 \quad 0, \dots \quad (.)$$

$$E_1(\omega_s) = \left( \mathbf{x} + \mathbf{z} \frac{k_x}{k_{1z}} \right) E_{Rx} e^{i(k_x(\omega_s)x - k_{1z}(\omega_s)z - \omega_s t)} \quad (3.13)$$

$z < 0$

$$E_2(\omega_s) = \left( \mathbf{x} - \mathbf{z} \frac{k_x}{k_{2z}} \right) E_{Tx} e^{i(k_x(\omega_s)x - k_{2z}(\omega_s)z - \omega_s t)} + \\ + \mathbf{x}(\gamma_{xx} P_x^{nl}(\omega_s) + \gamma_{xz} P_z^{nl}(\omega_s)) + \mathbf{z}(\gamma_{zx} P_x^{nl}(\omega_s) + \gamma_{zz} P_z^{nl}(\omega_s)) \quad (3.14)$$

$$z < 0.$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xx} &= \frac{4\pi k_{2s,z}^2(\omega_s)}{\varepsilon_2(k_{2s}^2(\omega_s) - k_2^2)}, \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{4\pi k_x k_{2s,z}}{\varepsilon_2(k_{2s}^2 - k_2^2)}, \\ \gamma_{zz} &= \frac{4\pi(k_{2s,z}^2 - k_2^2)}{\varepsilon_2(k_{2s}^2 - k_2^2)}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}k_{2s,x} &= k_x \quad |_{1,2} \\ E_{Rx} \quad E_{Tx} &, \quad z=0(\dots) \\ \begin{cases} E_{Rx} - E_{Tx} = \gamma_{xx} P_x^{nl} + \gamma_{xz} P_z^{nl} \\ \varepsilon_1 \frac{k_x}{k_{1x}} E_{Rx} + \varepsilon_2 \frac{k_x}{k_{2x}} E_{Tx} - \varepsilon_2 (\gamma_{zx} P_x^{nl} + \gamma_{zz} P_z^{nl}) \end{cases}\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}P_x^{nl} \quad P_z^{nl} \\ E_{Rx} \quad E_{Tx}, \dots P^{nl}(\dots)\end{aligned}$$

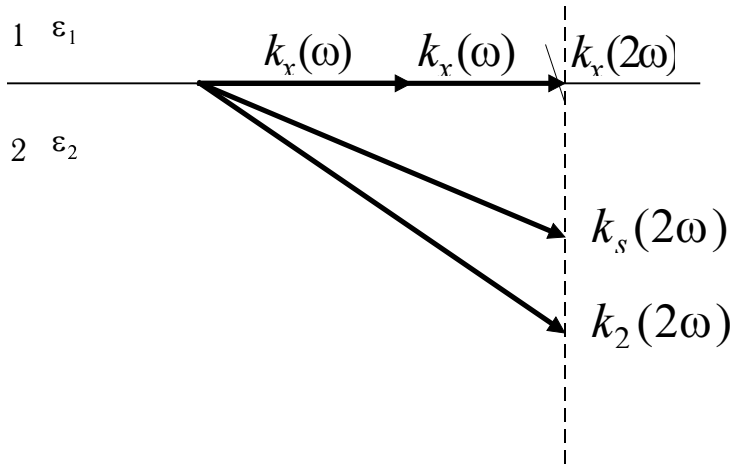
1.  $\omega_s(\dots)$   
) - ,  
) - .
2.  $\omega_s(\dots)$   
) - ,  
) - .

$$- (\chi_{metal}^{(2)} \approx 0)$$

$$E(\omega) = (\mathbf{x}E_x + \mathbf{z}E_z) \exp(ik_x x - \beta z - i\omega t)$$

$$P^{nl}(2\omega) = \mathbf{P}^{(2)}(2\omega) = \bar{\chi}^{(2)} : (\mathbf{x}E_x + \mathbf{z}E_z)^2 \exp(i2k_x x - 2\beta z - i2\omega t)$$

-



$$k_{sx}(2\omega) = k_x(2\omega) = 2k_x(\omega)$$

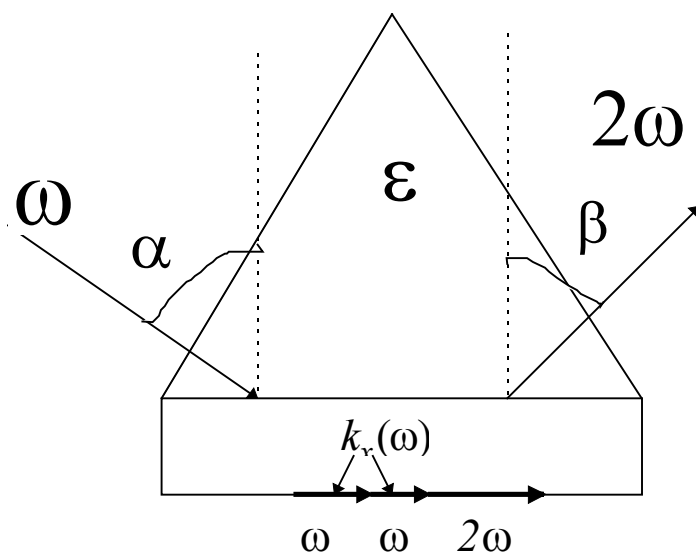
. 3.7.

Решение - объёмная волна, если :

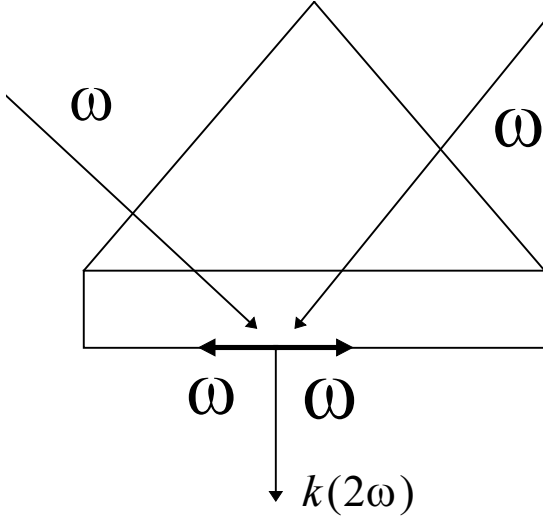
$$|k_2(2\omega)| = \left| \frac{2\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(2\omega)} \right| > |2k_x(\omega)| \quad (3.17)$$

$$\begin{cases}
 \mathbf{E}_1(2\omega) = \left( \mathbf{x} + \mathbf{z} \frac{k_x}{k_{1z}} \right) E_{Rx} e^{i(k_x x - k_{1z} z - 2\omega t)}, & z < 0 \\
 \mathbf{E}_2(2\omega) = \left( \mathbf{x} - \mathbf{z} \frac{k_x}{k_{1z}} \right) E_{Tx} e^{i(k_x x + k_{2z} z - 2\omega t)} + \\
 \mathbf{x}(\gamma_{xx} P_x^{nl} + \gamma_{xz} P_z^{nl}) + \mathbf{z}(\gamma_{zx} P_x^{nl} + \gamma_{zz} P_z^{nl}), & z > 0 \\
 \mathbf{P}^{nl} = \chi^{(2)} \mathbf{E}_2(\omega) \mathbf{E}_2(\omega)
 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$|k_2(2\omega)| \leq |2k_x(\omega)|, \quad \dots$$



$$\mathbf{k}(2\omega) = 2k_x(\omega)\mathbf{x} + \left[ \frac{4\omega^2}{c^2} \varepsilon(2\omega) - (2k_x(\omega))^2 \right]^{1/2} \mathbf{z}$$



$$k_{sx}(2\omega) = k_x(\omega) - k_x(\omega) = 0$$

- .

$$k_{sx}(2\omega) = k_x(2\omega) > k(2\omega), \quad . . .$$

$$\text{Re}[k_x^2 - K^2] \approx 0, \quad K^2 = (K' + iK'')^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} . . .$$

.

$$\mathbf{P}^{(3)}(\omega_{as}) = \bar{\chi}^{(3)}(\omega_{as} = \omega_1 + \omega_1 - \omega_2) : \mathbf{E}_1(\omega_1) \mathbf{E}_1(\omega_1) \mathbf{E}_2^*(\omega_2), \quad (3.19)$$

,  $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \quad \mathbf{k}_{1\parallel}(\omega_1) \quad \mathbf{k}_{2\parallel}(\omega_2)$ ,  $\chi^{(3)} = \chi_R^{(3)} + \chi_{NR}^{(3)}$  , :

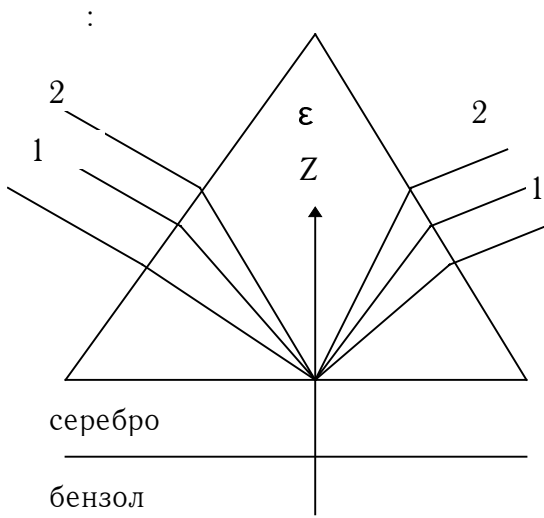
$$\chi_R^{(3)} = \frac{A}{(\omega_1 - \omega_2 - \Omega) + i\Gamma}, \quad (3.20)$$

$\Omega$  .

$$|\mathbf{k}_{s\parallel}(\omega_{as})| = |2\mathbf{k}_{1\parallel} - \mathbf{k}_{2\parallel}| > \left( \frac{\omega_{as}}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) \quad (3.21)$$

( ) :

$$k_{s\parallel}(\omega_{as}) \approx K'(\omega_{as}) \quad (3.22)$$



3.8. , .

"" . , , :

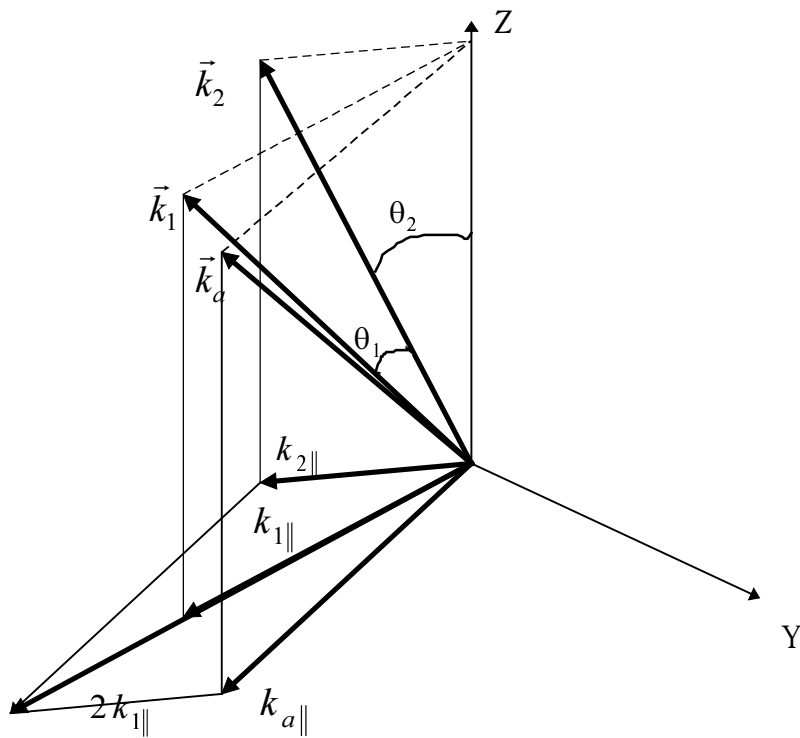


Рис. 3.9. Схема трехмерного согласования волновых векторов взаимодействующих волн в эффекте КАРС.