

Лекции 15-16

Интерферометрия второй гармоники

В вакууме амплитуда \mathbf{E}_Ω плоской электромагнитной волны $\mathbf{E}_\Omega \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R} - i\Omega t)$ полагается вещественной. При рассмотрении распространения волны в среде, амплитуда волны \mathbf{E}_Ω задается в виде

$$\mathbf{E}_\Omega \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) = \int \vec{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}', \Omega) \mathbf{P}(\mathbf{r}', \Omega) d\mathbf{r}', \quad (1)$$

и трактуется как комплексная величина. Здесь, аналогично выражению (??), \vec{G} - тензорная функция Грина на частоте Ω , а \mathbf{P} - вектор поляризации в среде, являющейся суммой линейной и нелинейной поляризаций: $\mathbf{P} = \mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL}$. В данном разделе рассматриваются экспериментальные нелинейно-оптические методики измерения фазы Φ амплитуды $\mathbf{E}_\Omega = |\mathbf{E}_\Omega| e^{i\Phi}$.

Фаза волны второй гармоники

В линейной среде комплексность амплитуды \mathbf{E}_Ω отражает запаздывание распространения волны в среде относительно вакуума из-за поглощения, т.е. напрямую определяется дисперсией линейной восприимчивости среды $\chi^{(1)}$, входящей как в линейную поляризацию \mathbf{P}^L , так в функцию Грина \vec{G} . В случае нелинейной среды природа комплексности \mathbf{E}_Ω более сложная, поскольку параметрические нелинейно-оптические процессы (и, в частности, генерация квадратичной поляризации на частоте второй гармоники) напрямую с поглощением среды не связаны. Физический смысл фазы Φ амплитуды нелинейной волны состоит в запаздывании нелинейной волны относительно волны накачки в вакууме. Причины комплексности амплитуды \mathbf{E}_Ω нелинейной волны (в дальнейшем - волны ВГ) следующие:

(i) Комплексность тензора квадратичной восприимчивости $\chi^{(2)}$. Наличие в нелинейной среде уровней (газы) или зон (твердые тела) электронных состояний приводит к резонансам в $\chi^{(2)}$, однофотонным (разница между энергиями состояний $\Delta E = \hbar\omega$) и (или) двухфотонным ($\Delta E = 2\hbar\omega$). Вблизи резонансов $\text{Im}\chi^{(2)} \neq 0$. Смысл комплексности $\chi^{(2)}$ - резонансность двух из трех виртуальных уровней, участвующих в генерации ВГ означает метастабильность (большое время жизни) этого виртуального состояния, что приводит к появлению разности фаз между амплитудами накачки и квадратичной поляризации. Такой механизм появления фазы в \mathbf{P}^{NL} будем называть запаздыванием генерации.

(ii) Запаздывание распространения. Пространственное распределение нелинейной поляризации, выражаемое интегралом в свертке (1), приводит к появлению дополнительной разности фаз между амплитудами волн нелинейной поляризации и ВГ. Например, рассмотрим поле ВГ, генерируемое на просвет однородной нелинейной пластины вдоль ее нормали, совпадающей с осью \mathbf{z} . Выражение (1) для амплитуды ВГ непосредственно после пластины примет вид:

$$\mathbf{E}_{2\omega} = T_{2\omega} \int_0^L \mathbf{P}_{2\omega} e^{i\Delta k z'} dz', \quad (2)$$

где L - толщина пластины, $\Delta k = k_{2\omega} - 2k_\omega$, и $T_{2\omega}$ - френелевский фактор на прохождение волны ВГ через границу раздела пластина-вакуум для соответствующей поляризации волны ВГ. Амплитуда поля $\mathbf{E}_{2\omega}$ становится комплексной величиной даже в отсутствие поглощения ($\mathbf{P}_{2\omega}$ - действительна)

$$\mathbf{E}_{2\omega} = T_{2\omega} \mathbf{P}_{2\omega} (i\Delta k)^{-1} (e^{i\Delta k L} - 1). \quad (3)$$

Физический смысл такой комплексности $\mathbf{E}_{2\omega}$ - деструктивная интерференция волн ВГ, прогенерированных в разных областях нелинейной пластины, описываемая комплексными "пропагаторами" функций Грина $e^{ik_{2\omega}z'}$ и $e^{ik_\omega z'}$.

(iii) Влияние поглощения. Поглощение в нелинейной среде приводит к дополнительной комплексности амплитуды волны ВГ и учитывается через функции Грина на обеих частотах ω и 2ω . Дополнительная, по сравнению с фактором $e^{i\mathbf{k}_\omega \mathbf{r}'}$, комплексность $\vec{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}', \omega)$ приводит к разности фаз между амплитудами квадратичной поляризации $\mathbf{P}_{2\omega}$ и поля накачки в вакууме \mathbf{E}_ω . Комплексность $\vec{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}', 2\omega)$, выражаемая комплексностью $k_{2\omega}$ и френелевских факторов для волны ВГ $\mathbf{E}_{2\omega}$, обуславливает дополнительную разность фаз между $\mathbf{P}_{2\omega}$ и $\mathbf{E}_{2\omega}$. Можно сказать, что поглощение приводит к дополнительному запаздыванию распространения волны ВГ.

Итак, разность фаз Φ между амплитудами волн накачки и ВГ обусловлена эффектами запаздывания генерации нелинейной поляризации и запаздывания распространения волн накачки и ВГ, выражаемых через комплексность тензора квадратичной восприимчивости $\chi^{(2)}$, а также функций Грина $\vec{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}', \omega)$ и $\vec{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}', 2\omega)$, соответственно.

Однолучевая интерферометрия второй гармоники

Основная проблема фазовых измерений состоит в том, что экспериментально измеряемой величиной является интенсивность волны $I_\Omega = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E}_\Omega \mathbf{E}_\Omega^*$, в которой информация о фазе волны Φ полностью утеряна. Методы интерферометрии в нелинейной оптике основаны на сложении двух волн, $\mathbf{E}_\Omega^{(1)} = |\mathbf{E}_\Omega^{(1)}| \exp(i\Phi_1)$ и $\mathbf{E}_\Omega^{(2)} = |\mathbf{E}_\Omega^{(2)}| \exp(i\Phi_2)$. Интенсивность суммарной волны $\mathbf{E}_\Omega = \mathbf{E}_\Omega^{(1)} + \mathbf{E}_\Omega^{(2)}$ имеет вид

$$I_\Omega = \frac{c}{8\pi} (|\mathbf{E}_\Omega^{(1)}|^2 + |\mathbf{E}_\Omega^{(2)}|^2 + 2\text{Re} \mathbf{E}_\Omega^{(1)*} \mathbf{E}_\Omega^{(2)}). \quad (4)$$

Последний член в выражении (4) - интерференционный, он пропорционален $\cos(\Phi_2 - \Phi_1)$ и несет в себе информацию о фазах Φ_1 и Φ_2 (более корректно - о разности фаз $\Phi_2 - \Phi_1$).

Наиболее простой и точный метод интерферометрии ВГ - однолучевая интерферометрия, основанная на использовании разности фаз между волнами ВГ и накачки, появляющейся из-за дисперсии фазосдвигающего элемента. Рассмотрим систему двух нелинейных образцов, нелинейно-оптические параметры одного из которых считаются заданными (их мы оговорим позднее). Этот образец будем называть *эталонным* или референсным. Второй образец - исследуемый. Пусть излучение накачки $\mathbf{E}_\omega e^{i(\omega t - i k_\omega z)}$ проходит через оба образца вдоль оси \mathbf{z} с $z = 0$ совпадающим с референсом. Проходя

через эталон, излучение накачки генерирует волну ВГ $|\mathbf{E}_{2\omega}^R|e^{i\Phi_R}e^{(i2\omega t - ik_{2\omega}z)}$. Пусть исследуемый образец находится в точке $z = z_0$. Непосредственно над его поверхностью (для геометрии на отражение) или за ним (в случае геометрии на просвет) поле волны ВГ от исследуемого образца имеет вид $|\mathbf{E}_{2\omega}^S|e^{i\Phi_S}e^{(i2\omega t - i2k_{\omega}z_0)}$ (поскольку $\mathbf{E}_{2\omega}^S \propto \mathbf{E}_{\omega}^2$). Суммарное поле ВГ от эталона и образца имеет вид:

$$\mathbf{E}_{2\omega}^{total}(z, t) = \left(|\mathbf{E}_{2\omega}^R|e^{i\Phi_R - ik_{2\omega}z_0} + |\mathbf{E}_{2\omega}^S|e^{i\Phi_S - i2k_{\omega}z_0} \right) e^{i2\omega t - ik_{2\omega}(z - z_0)}. \quad (5)$$

Детектируемая интенсивность ВГ от такой системы имеет вид

$$I_{2\omega}^{total} = \frac{c}{8\pi} \left(|\mathbf{E}_{2\omega}^R|^2 + |\mathbf{E}_{2\omega}^S|^2 + 2|\mathbf{E}_{2\omega}^R||\mathbf{E}_{2\omega}^S| \cos((k_{2\omega} - 2k_{\omega})z_0 - (\Phi_R - \Phi_S)) \right). \quad (6)$$

Поскольку $I_{2\omega}^R \equiv \frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}_{2\omega}^R|^2$ и $I_{2\omega}^S \equiv \frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}_{2\omega}^S|^2$ - "парциальные" интенсивности ВГ от эталона и образца, зависимость детектируемой интенсивности ВГ от расстояния между референсом и образцом, называемая *интерферограммой* ВГ, задается как

$$I_{2\omega}^{total}(z_0) = I_{2\omega}^R + I_{2\omega}^S + 2\sqrt{I_{2\omega}^R I_{2\omega}^S} \cos\left(2\pi\frac{z_0}{L} - (\Phi_R - \Phi_S)\right), \quad (7)$$

где период интерференционной картины $L = \lambda_{2\omega}(n_{2\omega} - n_{\omega})^{-1}$ определяется дисперсией среды в зазоре между образцами. "Парциальные" интенсивности ВГ, Величина $I_{2\omega}^R$ и $I_{2\omega}^S$ могут быть измерены независимо вставлением в зазор фильтров, блокирующих либо излучение ВГ, либо излучение накачки. Интерференционная картина $I_{2\omega}^{total}(z_0)$ получается при перемещении образца или референса (чаще всего) вдоль луча накачки. Величина $I_{2\omega}^{total}(0)$ однозначно определяет разность фаз $\Delta\Phi = \Phi_R - \Phi_S$.

Сделаем несколько замечаний о выражении (7).

(1). Выражение (7) получено в приближении плоских волн. При более сложной пространственной конфигурации волнового фронта луча накачки необходимо учитывать дополнительные набеги фаз, возникающие при проектировании волнового фронта на плоскость фотодетектора (фотокатода ФЭУ, например) и зависящие от координаты в поперечной к пучку плоскости. Суммирование этих фазовых сдвигов эффективно приводит к уменьшению контраста интерференционной картины и зависимости ее периода от координаты. Дополнительно, в расходящихся (как, впрочем, и в фокусирующихся) пучках, наряду с эффектами неплоского волнового фронта необходимо учитывать изменение интенсивностей $I_{2\omega}^R$ и $I_{2\omega}^S$ сигналов от референса и образца из-за изменения интенсивности накачки I_{ω} . Проще всего это сделать в случае гауссова пучка с распределением интенсивности в поперечном направлении, что и будет рассмотрено ниже.

(2). При выводе выражения (7) подразумевалось, что излучения накачки и ВГ полностью когерентны. В реальности, лишь излучение одномодового лазера можно считать близким к полностью когерентному. Оптическая неидеальность референса или образца (шероховатость) также приводит к сбою некогерентности излучений накачки и ВГ. Частичная когерентность излучений накачки и ВГ эффективно приводит к уменьшению контраста интерференционной картины и феноменологически учитывается введением в интерференционном члене множителя $\alpha < 1$. Подробнее влияние когерентности излучения лазера на интерферометрию ВГ будет рассмотрено ниже.

(3). В выражении (5) для полного поля ВГ пренебрегалось отражением (для геометрии на отражение) или прохождением (для геометрии на просвет) волны ВГ от эталона $\mathbf{E}_{2\omega}^R$. Если поглощение на частоте ВГ в образце существенно, то френелевские факторы становятся комплексными, приводя к дополнительному сдвигу фаз. Для его учета в выражениях (5 - 7) необходимо сделать замены $|\mathbf{E}_{2\omega}^R| \rightarrow |\mathbf{E}_{2\omega}^R| |F_{2\omega}|$ и $\Phi_R \rightarrow \Phi_R - \text{Arg} F_{2\omega}$.

Сформулируем требования к эталонному образцу. (1) Он должен быть оптически неактивным. Из-за двулучепреломления в эталоне поляризация накачки может меняться при прохождении через референс, что недопустимо для интерферометрии ВГ, поскольку генерация ВГ существенно зависит от комбинации поляризаций излучений накачки и ВГ. (2) Для спектроскопической интерферометрии ВГ эталон должен быть существенно тоньше длины волны для избежания мейкеровских биений при перестройки длины волны накачки. (3) Параметры отклика референса - $|\mathbf{E}_{2\omega}^R|$ и Φ_R считаются известными. Амплитуда волны ВГ от эталона $|\mathbf{E}_{2\omega}^R|$ может быть определена из независимо измеренной интенсивности $I_{2\omega}^R$, а фаза Φ_R считается либо известной, либо требует независимой калибровки.

Для воздуха при $\lambda_{2\omega} = 532$ нм дисперсия $\Delta n = n_{2\omega} - n_{\omega} \sim 4,3 \cdot 10^{-6}$, и период интерференционной картины $L \sim 13$ см. Достоинством воздушного варианта однолучевой интерферометрии ВГ является его высокая точность и отсутствие требования субмикронной стабильности расстояния z_0 между эталоном и референсом, являющимся ключевым в линейной интерферометрии. Основным источником погрешности в воздушной интерферометрии ВГ является перемещение на большие расстояния эталона или образца.

Этого недостатка лишена другая модификация метода однолучевой интерферометрии ВГ, в которой разность фаз между волнами ВГ от референса $\mathbf{E}_{2\omega}^R$ и образца $\mathbf{E}_{2\omega}^S$ создается задержкой волны $\mathbf{E}_{2\omega}^R$ относительно волны накачки \mathbf{E}_{ω} в прозрачной линейной среде (обычно плоскопараллельной пластине плавленого кварца), помещенной в зазор между эталоном и образцом. Если плоские волны накачки и ВГ падают под углом θ на плоскопараллельную пластину толщиной D , то разность хода между ними складывается из разности хода внутри пластины и компенсирующей разности хода вне пластины:

$$\Delta D = D \left(\frac{n_{2\omega}}{\cos \theta_{2\omega}} - \frac{n_{\omega}}{\cos \theta_{\omega}} \right) - D (\text{tg} \theta_{2\omega} - \text{tg} \theta_{\omega}) \sin \theta, \quad (8)$$

где углы внутри пластины $\theta_{\Omega} = \text{Arcsin} (n_{\Omega}^{-1} \sin \theta)$ и n_{Ω} - диэлектрическая проницаемость кварца на частоте Ω . Тогда, аналогично выражению (7), полная интенсивность ВГ имеет вид:

$$I_{2\omega}^{total}(\theta) = I_{2\omega}^R + I_{2\omega}^S + 2\sqrt{I_{2\omega}^R I_{2\omega}^S} \cos \left(2\pi \frac{D}{\lambda_{2\omega}} (n_{2\omega} \cos \theta_{2\omega} - n_{\omega} \cos \theta_{\omega}) - (\Phi_R - \Phi_S) \right), \quad (9)$$

где углы θ_{ω} и $\theta_{2\omega}$ - функции угла θ . Поворот пластины вокруг оси, перпендикулярной лучам накачки и ВГ, позволяет измерить интерферограмму $I_{2\omega}^{total}(\theta)$ и определить разность фаз $\Phi_R - \Phi_S$.

"Кварцевая" методика интерферометрии ВГ оставляет неподвижными эталон и образец. Недостатком ее является параллельное смещение лучей накачки и ВГ от референса, что может оказаться критичным при исследовании неоднородных образцов.

Этого недостатка можно избежать, если создавать оптическую разность хода не в наклонной плоскопараллельной пластине, а при помощи двух клинов с иммерсированной внутренней границей раздела для уменьшения потерь. Если внешние грани клинов остаются перпендикулярными лучам накачки и ВГ, то изменение общей толщины кварца в лучах не приводит к их сдвигам.

Сдвиг фаз между волнами $\mathbf{E}_{2\omega}^R$ и \mathbf{E}_ω можно изменять, контролируемым образом варьируя давления газа в зазоре между эталоном и образцом. Для этого в зазор помещается кювета с газом (для уменьшения потерь на окнах кюветы эталон и образец по возможности также помещаются в кювету). В приближении линейной зависимости дисперсии газа $\Delta n = n_{2\omega} - n_\omega$ от давления p :

$$\Delta n(p) = \Delta n(p_0) \frac{p}{p_0}, \quad (10)$$

где p_0 - давление калибровки. Если в качестве рабочего газа используется воздух, то обычно p_0 - атмосферное давление. Интерферограммой ВГ является зависимость полной интенсивности ВГ от давления газа в кювете:

$$I_{2\omega}^{total}(p) = I_{2\omega}^R + I_{2\omega}^S + 2\sqrt{I_{2\omega}^R I_{2\omega}^S} \cos\left(2\pi \frac{p}{\Delta p} - (\Phi_R - \Phi_S)\right). \quad (11)$$

Период интерференционной картины определяется величиной

$$\Delta p = \frac{p_0 \lambda_{2\omega}}{\Delta n(p_0) z_0}, \quad (12)$$

где z_0 - по-прежнему, расстояние между эталоном и образцом.

При использовании в качестве накачки ИК излучение ИАГ-Nd³⁺ лазера, а воздуха как рабочего газа при нормальных условиях, то $\Delta n(p_0) = 4,3 \cdot 10^{-6}$ и $\Delta p \approx 9150/z_0$ Торр, если z_0 измеряется в сантиметрах.

Интерферометрия второй гармоники в гауссовых пучках

Пусть пучок излучения накачки на частоте ω распространяется вдоль оси \mathbf{z} , а $\rho = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ - радиус-вектор в плоскости: перпендикулярной пучку, $\rho = 0$ соответствует оси пучка. При $z = 0$ распределение амплитуды поля накачки по сечению имеет вид:

$$E_\omega(\rho, z = 0) = E_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\varrho_0^2}\right), \quad (13)$$

будучи действительной величиной, а волновой фронт - плоскость. Введем *дифракционную длину* пучка $z_d = k_\omega n_\omega \varrho_0^2$ и k_ω - волновой вектор в вакууме.

При распространении пучок дифрагирует на своей апертуре и амплитуда поля записывается в виде:

$$E_\omega(\rho, z) = E_0 \frac{\varrho_0}{\varrho(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\varrho^2(z)}\right) \exp\left(-i\frac{\rho^2}{2\varrho^2(z)} \frac{z}{z_d} + i\alpha(z)\right), \quad (14)$$

где $\varrho^2(z) = \varrho_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_d^2}\right)$ и $\alpha(z) = \text{Arctg}\left(\frac{z}{z_d}\right)$.

В дальнейшем выберем масштаб z и ρ в единицах z_d и ϱ_0 . Тогда выражение (14) примет вид:

$$E_\omega(\rho, z) = \frac{E_0}{\varrho(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\varrho^2(z)}\right) \exp\left(-i\frac{\rho^2}{2\varrho^2(z)}z + i\alpha(z)\right), \quad (15)$$

с $\varrho^2(z) = 1 + z^2$ и $\alpha(z) = \text{Arctg}z$.

Отметим следующие особенности дифракции гауссова пучка.

(1) При распространении пучка он сохраняет гауссов профиль в сечении, перпендикулярном направлению его распространения

$$I_\omega(\rho, z) = \frac{I_0}{\varrho^2(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\varrho^2(z)}\right). \quad (16)$$

(2) Эффективный радиус пучка возрастает по закону $\sqrt{1 + z^2}$.

(3) Амплитуда волны в пучке становится комплексной величиной. Смысл этой комплексности - изменение профиля волнового фронта. Если при $z = 0$ волновой фронт - плоскость, то по мере распространения пучка волновой фронт становится отличным от плоского. Форма волнового фронта определяется конкуренцией двух фазовых множителей - $\exp(-i\rho^2 z / (2\varrho^2))$ и $\exp(i\alpha)$. Первый из них описывает сферический волновой фронт с радиусом кривизны $R = k\varrho^2/z$ (поскольку фаза сферической волны задается множителем $\exp(-ik\rho^2/(2R))$). Вблизи оси пучка волновой фронт отличен от сферического и определяется фазовым множителем $\exp(i\alpha)$.

В случае дифракции гауссова пучка на частоте 2ω амплитуда поля ВГ задается аналогично выражению (14):

$$E_{2\omega}(\rho, z) = E_0^{(2)} \frac{\varrho_0^{(2)}}{\varrho^{(2)}(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\varrho^{(2)2}(z)}\right) \exp\left(-i\frac{\rho^2}{2\varrho^{(2)2}(z)}\frac{z}{z_d^{(2)}} + i\alpha^{(2)}(z)\right), \quad (17)$$

где $\varrho^{(2)2}(z) = \varrho_0^{(2)2} \left(1 + \frac{z^2}{z_d^{(2)2}}\right)$ и $\alpha^{(2)}(z) = \text{Arctg}\left(\frac{z}{z_d^{(2)}}\right)$. Если пучок ВГ был прогенерен пучком накачки при $z = 0$, то

$$E_{2\omega}(\rho, z = 0) = E_0^{(2)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\varrho_0^{(2)2}}\right) \sim E_0^2 \exp\left(-\frac{\rho^2}{\varrho_0^2}\right). \quad (18)$$

Тогда $\varrho_0^{(2)} = \varrho_0/\sqrt{2}$ и $z_d^{(2)} = k_{2\omega}n_{2\omega}\varrho_0^{(2)2} = 2k_\omega n_{2\omega}\varrho_0^2/2 = z_d n_{2\omega}/n_\omega = z_d/\nu$, где $k_{2\omega}$ - волновой вектор изучения ВГ в вакууме. Значит, $\varrho^{(2)2}(z) = \varrho_0^2/2 \left(1 + \nu^2 \left(\frac{z}{z_d}\right)^2\right)$ и $\alpha^{(2)}(z) = \text{Arctg}\left(\nu \frac{z}{z_d}\right)$. Тогда выражение для амплитуды волны ВГ в единицах ϱ_0 и z_d примет вид

$$E_{2\omega}(\rho, z) = \frac{E_0^{(2)}}{\sqrt{1 + \nu^2 z^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{1 + \nu^2 z^2}\right) \exp\left(-i\frac{\rho^2}{1 + \nu^2 z^2}\nu z + i\alpha^{(2)}(z)\right). \quad (19)$$

Рассмотрим схему однолучевой интерферометрии ВГ, при которой референс находится в плоскости $z = 0$, а образец - в плоскости $z = z_0$. Тогда поле ВГ от референса в плоскости $z = z_0$ имеет вид выражения (19):

$$E_{2\omega}^R(\rho, z_0, t) = \frac{E_0^{(2)}}{\sqrt{1 + \nu^2 z_0^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{1 + \nu^2 z_0^2}\right) \times \quad (20)$$

$$\times \exp\left(-i\frac{\rho^2}{1 + \nu^2 z_0^2}\nu z_0 + i\alpha^{(2)}(z_0) - ik_{2\omega}n_{2\omega}z_0 + i2\omega t + i\Phi_R\right).$$

Поле ВГ от образца в плоскости $z = z_0$ $E_{2\omega}^S(z_0) \sim E_{2\omega}^2(z_0)$ и, следуя (15), имеет вид:

$$E_{2\omega}^S(\rho, z_0, t) = \frac{E_0^{(2)}}{1 + z_0^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{1 + z_0^2}\right) \times \quad (21)$$

$$\times \exp\left(-i\frac{\rho^2}{1 + z_0^2}z_0 + i2\alpha(z_0) - i2k_{\omega}n_{\omega}z_0 + i2\omega t + i\Phi_S\right).$$

Интерференционный член $E_{2\omega}^R E_{2\omega}^{S*}$ запишется в виде:

$$E_{2\omega}^R(\rho, z_0)E_{2\omega}^{S*}(\rho, z_0) = \frac{E_0^{(2)2}}{(1 + z_0^2)\sqrt{1 + \nu^2 z_0^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{1 + z_0^2} - \frac{\rho^2}{1 + \nu^2 z_0^2}\right) \times \quad (22)$$

$$\times \exp\left(-i\frac{\rho^2}{1 + \nu^2 z_0^2}\nu z_0 + i\frac{\rho^2}{1 + z_0^2}z_0 + i\alpha^{(2)}(z_0) - i2\alpha(z_0) - ik_{2\omega}n_{2\omega}(\nu - 1)z_0 + i\Delta\Phi\right),$$

где $\Delta\Phi = \Phi_R - \Phi_S$. Выражение (23) может быть записано как

$$E_{2\omega}^R(\rho, z_0)E_{2\omega}^{S*}(\rho, z_0) = \frac{E_0^{(2)2}}{(1 + z_0^2)\sqrt{1 + \nu^2 z_0^2}} \exp\left(-\rho^2(\xi(z_0) + i\zeta(z_0)) + i\Phi(z_0)\right), \quad (23)$$

где

$$\xi(z_0) = \frac{2 + (1 + \nu^2)z_0^2}{(1 + z_0^2)(1 + \nu^2 z_0^2)}, \quad (24)$$

и

$$\zeta(z_0) = z_0 \frac{(\nu - 1)(1 - \nu z_0^2)}{(1 + z_0^2)(1 + \nu^2 z_0^2)}, \quad (25)$$

а независящая от поперечной координаты относительная фаза

$$\Phi(z_0) = \alpha^{(2)}(z_0) - 2\alpha(z_0) - k_{2\omega}n_{2\omega}(\nu - 1)z_0 + \Delta\Phi. \quad (26)$$

С учетом выражений (21),(22), и (23), интенсивность суммарного поля ВГ запишется в виде

$$I_{2\omega}^{total}(\rho, z_0) = \frac{c}{8\pi} \left(E_0^{(2)}\right)^2 \left(\frac{1}{1 + \nu^2 z_0^2} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{1 + \nu^2 z_0^2}\right) + \frac{1}{(1 + z_0^2)^2} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{1 + z_0^2}\right) \right) + \quad (27)$$

$$+ \frac{c}{8\pi} \left(E_0^{(2)}\right)^2 \left(2\text{Re} \frac{1}{(1 + z_0^2)\sqrt{1 + \nu^2 z_0^2}} \exp\left(-\rho^2(\xi(z_0) + i\zeta(z_0)) + i\Phi(z_0)\right) \right).$$

Полная интенсивность ВГ задается интегралом

$$I_{2\omega}^{total}(z_0) = \int_0^{+\infty} I_{2\omega}^{total}(\rho, z_0) 2\pi\rho d\rho, \quad (28)$$

имеющим смысл мощности суммарного излучения ВГ. Интегрирование выражения (28) приводит к следующей зависимости полной интенсивности от z_0 в единицах $c/(8\pi) \left(E_0^{(2)}\right)^2$:

$$I_{2\omega}^{total}(z_0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(1+z_0^2)} + 2\pi \operatorname{Re} \frac{\sqrt{1+\nu^2 z_0^2}}{(2+(1+\nu^2)z_0^2) + iz_0(\nu-1)(1-\nu z_0^2)} \exp(i\Phi). \quad (29)$$

Отметим, что выражение (29) получается при перемещении образца, а не эталона, который должен всегда находиться в плоскости $z = 0$, где волновой фронт - плоский. Первый член в выражении (29) отражает постоянство "парциальной" интенсивности ВГ от эталона; второй член есть "парциальная" интенсивность ВГ от образца, зависящая от его координаты из-за распыливания пучка накачки.

Перепишем выражение (29) для интерферограммы в виде, наиболее близком к традиционной записи для случая параллельных пучков:

$$I_{2\omega}^{total}(z_0) = I_{2\omega}^R + I_{2\omega}^S(z_0) + 2\mu(z_0) \sqrt{I_{2\omega}^R I_{2\omega}^S(z_0)} \cos\left(2\pi \frac{z_0}{L} + \beta(z_0) + \Delta\Phi\right), \quad (30)$$

где $I_{2\omega}^R = \pi/2$, $I_{2\omega}^S(z_0) = \pi/(2(1+z_0^2))$, $L = 2\pi/(k_{2\omega} n_{2\omega}(\nu-1))$, а

$$\mu(z_0) = 2 \sqrt{\frac{(1+z_0^2)(1+\nu^2 z_0^2)}{(2+(1+\nu^2)z_0^2)^2 + (z_0(\nu-1)(1-\nu z_0^2))^2}}, \quad (31)$$

$$\beta(z_0) = \operatorname{Arctg} \frac{\zeta(z_0)}{\xi(z_0)} + \operatorname{Arctg}(\nu z_0) - 2\operatorname{Arctg}(z_0). \quad (32)$$

Итак, при однолучевой интерферометрии ВГ в расходящемся гауссовом пучке полная интенсивность ВГ, аналогично случаю параллельных пучков, осциллирует как функция расстояния между эталоном и образцом, однако контраст и период интерференционной картины становятся зависящими от положения образца.

Оценим характерные масштабы величин, описывающих дифракцию гауссова пучка. При начальном диаметре луча ИК накачки ИАГ-Nd³⁺ лазера ($\lambda_\omega = 1064$ нм) $\varrho_0 \sim 0,1$ см, дифракционные длины пучков накачки и ВГ в воздухе $z_d \approx z_d^{(2)} \sim 6 \cdot 10^2$ см, а $\nu = 1 - 4,3 \cdot 10^{-6}$. При $L \sim 10^1$ см, можно считать, что для воздушного варианта однолучевой интерферометрии при всех разумных экспериментальных величинах зазора между эталоном и образцом $z \ll 1$ в единицах z_d . Поскольку

$$\frac{\zeta(z_0)}{\xi(z_0)} = z_0 \frac{(\nu-1)(1-\nu z_0^2)}{2+(1+\nu^2)z_0^2}, \quad (33)$$

или, с точностью до членов z_0^3 :

$$\frac{\zeta(z_0)}{\xi(z_0)} = \frac{z_0(\nu-1)}{2} \left(1 - \left(\nu + \frac{1+\nu^2}{2}\right) z_0^2\right). \quad (34)$$

Раскладывая первый член в выражении (32) до линейного члена, а второй и третий - до кубического, получим следующее приближенное выражение для дополнительного фазового сдвига $\beta(z_0)$:

$$\beta(z_0) = \frac{z_0(\nu - 1)}{2} \left(1 - \left(\nu + \frac{1 + \nu^2}{2} \right) z_0^2 \right) + z_0 \left((\nu - 2) - \frac{z_0^2}{3} (\nu^3 - 2) \right). \quad (35)$$

Окончательно,

$$\beta(z_0) = \frac{z_0}{2} \left((3\nu - 5) - \frac{z_0^2}{3} (-1 + 6\nu + 3\nu^2 + 2\nu^3) \right). \quad (36)$$

Подкоренное выражение для $\mu(z_0)$ с точностью до членов z_0^4 запишется в виде:

$$\frac{\mu^2(z_0)}{4} = \frac{1 + z_0^2(1 + \nu^2) + \nu^2 z_0^4}{4 + (4(1 + \nu^2) + (\nu - 1)^2) z_0^2 + ((1 + \nu^2)^2 - 2\nu(\nu - 1)^2) z_0^4}. \quad (37)$$

Для воздуха $(\nu - 1) \ll 1$, поэтому, пренебрегая в выражении (37) членами $(\nu - 1)^2 z_0^4$, получим:

$$\mu^2(z_0) = \left(1 + z_0^2(1 + \nu^2) + \nu^2 z_0^4 \right) \left(1 - \left((1 + \nu^2) + \frac{1}{4}(\nu - 1)^2 \right) z_0^2 - \frac{1}{4} \left((1 + \nu^2)^2 \right) z_0^4 \right). \quad (38)$$

Тогда выражение для $\mu(z_0)$ с точностью до z_0^4 и с пренебрежением членами $(\nu - 1)^2 z_0^4$ примет вид:

$$\mu(z_0) = 1 - \frac{1}{8} (\nu - 1)^2 z_0^2 + \frac{1}{2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} (1 + \nu^2)^2 \right) z_0^4. \quad (39)$$

Выражения (36) и (39) показывают, что в первом приближении дополнительный фазовый сдвиг $\beta(z_0)$ линеен по z_0 , давая постоянную добавку в период интерференционной картины. Изменение контраста интерферограммы ВГ в основном определяется зависимостью $I_{2\omega}^S$ от z_0 , будучи более сильной зависимостью, чем $\mu(z_0)$ из-за малости множителя $(\nu - 1)^2$ для последнего.

Отметим, что мы рассмотрели самую простую конфигурацию интерферометрии ВГ в гауссовом пучке, а именно, предполагалось, что эталон находится в поле накачки с плоским волновым фронтом. При более общем подходе необходимо рассматривать генерацию ВГ в дифрагирующем пучке с неплоским волновым фронтом как для образца, так и для эталона. Однако, учет дифракции в выражении для интерферограммы, полученном в (30) как появление поправок к периоду осцилляций и контрасту интерференционной картины, остается верен.

Рассмотрим интерферометрию ВГ в пучке накачке, фокусирующимся тонкой сферической линзой. Предположим, что линза находится в плоскости $z = 0$. Тонкая сферическая линза преобразует плоский волновой фронт в сферический с радиусом кривизны, равном его фокусному расстоянию f , оставляя неизменным пространственное распределение интенсивности в плоскости $z = 0$. Тогда поле накачки сразу после линзы имеет следующий вид (сравните с выражением (13)):

$$E_\omega(\rho, z = 0) = E_0 \exp \left(-\frac{\rho^2}{2\ell_0^2} + ik_\omega n_\omega \frac{\rho^2}{2f} \right). \quad (40)$$

Задача о распространении такого пучка сводится к учету дифракции гауссова пучка с начальным распределением амплитуды в виде выражения (40) и описывается аналогично выражению (14) с заменой действительного начального радиуса пучка ϱ_0 на комплексный радиус ϱ' в виде:

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{\varrho_0^2} - i \frac{k_\omega n_\omega}{f} = \frac{1}{\varrho_0^2} \left(1 - i \frac{z_d}{f} \right). \quad (41)$$

Распределение амплитуды поля накачки в сечении z фокусирующегося пучка запишется как:

$$E_\omega(\rho, z) = E_0 \frac{\varrho_0}{\varrho_f(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\varrho_f^2(z)}\right) \exp\left(-i \frac{\rho^2}{2\varrho_f^2(z)} \left(\frac{z}{z_d} - \frac{z_d}{f} \left(1 - \frac{z}{f}\right)\right) + i\alpha_f(z)\right), \quad (42)$$

где

$$\varrho_f^2(z) = \varrho_0^2 \left(\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \frac{z^2}{z_d^2} \right), \quad \alpha_f(z) = \text{Arctg} \left(\left(1 - \frac{z}{f}\right)^{-1} \frac{z}{z_d} \right). \quad (43)$$

Выражая ϱ единицах ϱ_0 , а z и f - в единицах z_d , выражение (43) примет вид:

$$E_\omega(\rho, z) = \frac{E_0}{\varrho_f(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\varrho_f^2(z)}\right) \exp\left(-i \frac{\rho^2}{2\varrho_f^2(z)} \left(z - \frac{1}{f} \left(1 - \frac{z}{f}\right)\right) + i\alpha_f(z)\right), \quad (44)$$

где

$$\varrho_f^2(z) = \left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + z^2, \quad \alpha_f(z) = \text{Arctg} \left(z \left(1 - \frac{z}{f}\right)^{-1} \right). \quad (45)$$

Итак, фокусировка гауссова пучка определяется величиной $1 - z/f$. Форма фазового фронта определяется конкуренцией двух сферических фронтов, расходящегося с радиусом кривизны $R_d = k_\omega n_\omega \varrho_f^2/z$, обусловленного дифракцией пучка, и расходящегося с радиусом кривизны $R_f = -k_\omega n_\omega \varrho_f^2 f / (1 - z/f)$, связанного с фокусировкой пучка.

Из выражения (45) для ϱ_f можно получить, что перетяжка (caustic) пучка достигается в сечении $z = z_c$, близком к фокусу:

$$z_c = \frac{f}{1 + f^2}. \quad (46)$$

В сечении перетяжки $R_d + R_f = 0$, т.е. волновой фронт плоский. Радиус пучка в перетяжке

$$\varrho_c^2 \equiv \varrho_f^2(z_c) = \frac{f^2}{1 + f^2}, \quad (47)$$

т.е. $\varrho_c^2 = fz_c$ (напомним, что в действительности это означает, что $\varrho_c^2 = fz_c(\varrho_0/z_d)$) и выражает известный факт близкой к линейной зависимости радиуса перетяжки и фокусного расстояния тонкой линзы. Видно, что ненулевой радиус пучка в перетяжке, а также сдвиг положения перетяжки от фокуса целиком обусловлены дифракцией пучка.

В большинстве экспериментальных ситуаций $f/z_d \ll 1$, поэтому вначале рассмотрим интерферометрию ВГ в фокусирующемся пучке, пренебрегая эффектами его дифракционного расплывания. Это эквивалентно пренебрежению в выражениях (42) и (43) z/z_d по сравнению с z/f . Выражение (42) для распределения амплитуды поля накачки в рамках этого приближения дается в виде:

$$E_\omega(\rho, z) = \frac{E_0}{\varrho_0(1-z/f)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\varrho_0^2(1-z/f)^2}\right) \exp\left(i\frac{\rho^2 z_d}{2f\varrho_0(1-z/f)} + i\alpha_f(z)\right), \quad (48)$$

Пусть эталон находится в сечении $z = z_R$. Тогда распределение поля ВГ от эталона непосредственно за ним имеет вид:

$$E_{2\omega}^R(\rho, z_R) = \frac{E_0^2}{\varrho_0^2(1-z_R/f)^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\varrho_0^2(1-z_R/f)^2}\right) \times \exp\left(i\frac{\rho^2 z_d}{f\varrho_0(1-z_R/f)} + i2\alpha_f(z_R)\right). \quad (49)$$

Обозначив

$$f^{2\omega}(z_R) = \frac{f}{\nu(1-z_R/f)}, \quad (50)$$

которая, как станет ясно ниже, имеет смысл локального фокусного расстояния волнового фронта пучка ВГ, запишем выражение (49) в виде:

$$E_{2\omega}^R(\rho, z_R) = \frac{E_0^2}{\varrho_f^2(z_R)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\varrho_f^2(z_R)} \left(1 - i\frac{z_d^{(2)}}{f^{2\omega}(z_R)}\right) + i2\alpha_f(z_R)\right). \quad (51)$$

Из сравнения показателя экспоненты в выражении (51) с выражением (41) видно, что пучок ВГ от эталона будет распространяться как параллельный пучок излучения ВГ, проходящий через тонкую сферическую линзу с фокусным расстоянием $f^{2\omega}$, помещенную в плоскость $z = z_R$. Распределение амплитуды ВГ описывается выражением, аналогичным выражению (42) и, пренебрегая дифракцией, имеет вид:

$$E_{2\omega}^R(\rho, \varsigma) = \frac{E_0^2}{\varrho_f(z_R)\varrho_{f,R}(\varsigma)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\varrho_{f,R}^2(\varsigma)}\right) \times \exp\left(i\frac{\rho^2}{\varrho_{f,R}^2(\varsigma)} \frac{z_d^{(2)}}{f^{2\omega}(z_R)} \left(1 - \frac{\varsigma}{f^{2\omega}(z_R)}\right) + i2\alpha_f(z_R) + i\alpha_f^{(2)}(\varsigma)\right), \quad (52)$$

где $\varsigma = z - z_R$ - координата вдоль оси пучка, отсчитываемая от эталона, z_R входит как параметр, а

$$\varrho_{f,R}(\varsigma, z_R) = \varrho_f(z_R) \left(1 - \frac{\varsigma}{f^{2\omega}(z_R)}\right), \quad (53)$$

$$\alpha_f^{(2)}(\varsigma, z_R) = \text{Arctg} \left(\varsigma \left(1 - \frac{\varsigma}{f^{2\omega}(z_R)}\right)^{-1} \right). \quad (54)$$

Пусть образец находится в плоскости $z = z_S$. Рассмотрим геометрию интерферометрии ВГ, при которой образец фиксирован, а интерферограмма ВГ измеряется при

перемещении эталона. Тогда положение образца z_S является параметром задачи, а переменными являются зазор ς между эталоном и образцом и положение эталона $z_R = z_S - \varsigma$. Обозначив $\phi(z) = 1 - z/f$ и $\varphi(\varsigma) = 1 - \varsigma/f^{2\omega}$, запишем выражения для поля ВГ от эталона и от образца в плоскости z_S в виде:

$$E_{2\omega}^R(\rho, \varsigma, z_R, t) = \frac{E_0^2}{\varrho_0^2 \phi^2(z_R) \varphi(\varsigma)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\varrho_0^2 \phi^2(z_R) \varphi^2(\varsigma)}\right) \times \exp\left(i\frac{\rho^2}{\varrho_0^2} \frac{z_d}{f \phi(z_R) \varphi(\varsigma)} + i2\alpha_f(z_R) + i\alpha_f^{(2)}(\varsigma) - ik_{2\omega} n_{2\omega} \varsigma + i2\omega t + i\Phi_R\right), \quad (55)$$

$$E_{2\omega}^S(\rho, \varsigma, z_S, t) = \frac{E_0^2}{\varrho_0^2 \phi^2(z_S)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\varrho_0^2 \phi^2(z_S)}\right) \times \exp\left(i\frac{\rho^2}{\varrho_0^2} \frac{z_d}{f \phi(z_S)} + i2\alpha_f(z_S) - i2k_{\omega} n_{\omega} \varsigma + i2\omega t + i\Phi_S\right), \quad (56)$$

Аналогично выражению (23), интерференционный член $E_{2\omega}^R(\rho, \varsigma, z_R) E_{2\omega}^{S*}(\rho, \varsigma, z_S)$ запишется в виде:

$$E_{2\omega}^R(\rho, \varsigma, z_R) E_{2\omega}^{S*}(\rho, \varsigma, z_S) = \frac{E_0^4}{\varrho_0^4 \phi^2(z_S) \phi^2(z_R) \varphi(\varsigma)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\varrho_0^2} \frac{\phi^2(z_S) + \phi^2(z_R) \varphi^2(\varsigma)}{\phi^2(z_R) \varphi^2(\varsigma) \phi^2(z_S)}\right) \times \exp\left(i\frac{\rho^2}{\varrho_0^2} \frac{z_d}{f} \frac{\phi(z_S) - \phi(z_R) \varphi(\varsigma)}{\phi(z_R) \varphi(\varsigma) \phi(z_S)} + i(2\alpha_f(z_R) + \alpha_f^{(2)}(\varsigma) - 2\alpha_f(z_S)) - ik_{2\omega} n_{2\omega} (1 - \nu) \varsigma + i\Delta\Phi\right). \quad (57)$$

Суммарная интенсивность ВГ в единицах $c/(8\pi)$ задается в виде интеграла (28):

$$I_{2\omega}^{total}(\varsigma, z_R, z_S) = \pi \int_0^{+\infty} d\rho^2 \times \left(|E_{2\omega}^R(\rho, \varsigma, z_R)|^2 + |E_{2\omega}^S(\rho, \varsigma, z_S)|^2 + 2\text{Re}E_{2\omega}^R(\rho, \varsigma, z_R) E_{2\omega}^{S*}(\rho, \varsigma, z_S)\right). \quad (58)$$

Тогда выражение для интерферограммы ВГ примет следующий вид:

$$I_{2\omega}^{total}(\varsigma, z_R, z_S) = I_{2\omega}^R(z_R) + I_{2\omega}^S(z_S) + 2\sqrt{I_{2\omega}^R(z_R) I_{2\omega}^S(z_S)} \text{Re}\left(\frac{e^{i\Phi}}{\theta - i\vartheta}\right), \quad (59)$$

где

$$I_{2\omega}^R(z_R) = \frac{\pi}{2\varrho_0^2 \phi^2(z_R)}, \quad I_{2\omega}^S(z_S) = \frac{\pi}{2\varrho_0^2 \phi^2(z_S)}, \quad (60)$$

есть парциальные интенсивности ВГ от эталона и образца,

$$\Phi(\varsigma, z_R, z_S) = 2\alpha_f(z_R) + \alpha_f^{(2)}(\varsigma) - 2\alpha_f(z_S) - k_{2\omega} n_{2\omega} (1 - \nu) \varsigma + \Delta\Phi, \quad (61)$$

есть независящий от поперечной к пучку координаты сдвиг фаз, а

$$\theta(\varsigma, z_R, z_S) - i\vartheta(\varsigma, z_R, z_S) = \frac{\phi^2(z_S) + \phi^2(z_R) \varphi^2(\varsigma)}{\phi(z_R) \varphi(\varsigma) \phi(z_S)} - i\frac{z_d}{f} (\phi(z_S) - \phi(z_R) \varphi(\varsigma)). \quad (62)$$

В терминах поправок к контрасту интерференционной картины и добавки к ее периоду, аналогично выражению (30), запишем выражение (59) как

$$I_{2\omega}^{total}(\varsigma, z_R, z_S) = I_{2\omega}^R(z_R) + I_{2\omega}^S(z_S) + 2\mu_f(\varsigma, z_R, z_S)\sqrt{I_{2\omega}^R(z_R)I_{2\omega}^S(z_S)}\cos\left(2\pi\frac{\varsigma}{L} + \beta_f(\varsigma, z_R, z_S) + \Delta\Phi\right), \quad (63)$$

где

$$\mu_f(\varsigma, z_R, z_S) = \left(\sqrt{\theta^2(\varsigma, z_R, z_S) + \vartheta^2(\varsigma, z_R, z_S)}\right)^{-1}, \quad (64)$$

$$\beta_f(\varsigma, z_R, z_S) = \text{Arctg}\frac{\vartheta(\varsigma, z_R, z_S)}{\theta(\varsigma, z_R, z_S)} + 2\alpha_f(z_R) + \alpha_f^{(2)}(\varsigma) - 2\alpha_f(z_S). \quad (65)$$

Выражение (63) собой представляет наиболее полную форму записи интерферограммы ВГ в фокусируемых гауссовых пучках в приближении малости дифракции. В зависимости от того, перемещением каких элементов - эталона, образца или и эталона и образца - меняется зазор ς между образцом и эталоном, z_R или z_S являются переменными. Видно, что оба сигнала ВГ от эталона и образца $I_{2\omega}^R$ и $I_{2\omega}^S$ зависят от координаты из-за уменьшения эффективного радиуса пучка. Поскольку в реальной экспериментальной ситуации характерный масштаб фокусировки - фокусное расстояние f , оказывается сравнимым с z_R и z_S , то поправки к контрасту интерферограммы ВГ $\mu_f(\varsigma, z_R, z_S)$ и к фазе $\beta_f(\varsigma, z_R, z_S)$ в общем случае не пренебрежимы.