ЛЕКЦИЯ #15
МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА

§ 15.01 Модель Лоренца: основные свойства

📖 [3, с.184-90, • 4, с.260-2 • 5, с.199-201 • 6, с.72-73 • 7, с.122-127 • 9, с.140-148].

◆ *Моделью Лоренца* (Lorenz model) [L63] называется динамическая система - поток с динамическими переменными X, Y и Z, параметрами σ, r и b и уравнениями движения

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y,\\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y,\\ \dot{Z} &= \quad XY - bZ\end{aligned} \tag{L}$$

[L63] E.N. Lorenz. “Deterministic Nonperiodic Flow.” J. Atmos. Sci., 1963, 20, 130.

◆ Параметры модели Лоренца подчинены ограничениям. По геометрическому смыслу $b < 4$, выделенным является значение $b = 8/3$. Параметр σ есть некоторая характеристика вещества - число Прандтля Pr, которое целесообразно считать постоянным. Следуя Лоренцу, часто принимают $\sigma = \mathrm{Pr} = 10$. Параметр r может принимать любые значения на полуоси $0 \le r < \infty$ и рассматривается как управляющий. Множество $b = 8/3,\ \sigma = 10,\ 0 \le r < \infty$ есть *стандартная прямая* в пространстве параметров модели Лоренца.

◆ Модель Лоренца обладает симметрией: система уравнений (L) инвариантна при замене

$$X \to -X, \quad Y \to -Y, \quad Z \to Z \tag{1}$$

Поэтому при вращении на π вокруг оси OZ либо аттрактор переходит в себя, либо имеются два аттрактора, переходящих друг в друга.

◆ Модель Лоренца есть диссипативная система: σдиссипация (см. §3.02)

$$\Lambda(\vec{x}) = -\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} - \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} - \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = \sigma + 1 + b \tag{2}$$

постоянна в фазовом пространстве и положительна. На стандартной прямой диссипация велика: $\Lambda = 13.67 >> 1$.

◆ Для диссипативной системы с K-мерным фазовым пространством и оператором эволюции $\hat{S}(t)$ *ловушкой* (trap) называется K-мерная область фазового пространства $\mathcal{T}$ такая, что если в начальный момент времени состояние системы лежит в $\mathcal{T}$, то и во все последующие моменты оно будет лежать в $\mathcal{T}$:

$$\vec{x}(0) \in \mathcal{T} \ \Rightarrow\ \hat{S}(t)\vec{x}(0) \in \mathcal{T} \tag{3}$$

Построение ловушки конечных размеров достаточно для доказательства финитности движения системы.

✧ Пример. Для логистического отображения при $2 \le \mu \le 4$ ловушкой является интервал $[x_-, x_+]$, где $x_+ = \mu/4$, $x_- = F(x_+)$.

◆ Докажем существование финитных движений в модели Лоренца. Рассмотрим эволюцию величины

$$u = X^2 + Y^2 + (Z - r - \sigma)^2. \tag{4}$$

По геометрическому смыслу "u" есть квадрат расстояния фазовой точки от точки A с координатами $(0, 0, r + \sigma)$.

$$\frac{1}{2}\dot{u} = -\sigma X^2 - Y^2 - b\left(Z - \frac{r+\sigma}{2}\right)^2 + b\frac{(r+\sigma)^2}{4} \tag{5}$$

Условие $\dot{u} = 0$ определяет поверхность трехосного эллипсоида $\mathcal{E}$, вне которого $\dot{u} < 0$. Если окружить эллипсоид сферой $\mathcal{S}$ с центром в точке $\{0, 0, r + \sigma\}$, то всюду на поверхности сферы будет $\dot{u} < 0$. Следовательно, если фазовая точка находится внутри сферы $\mathcal{S}$, то она останется в ней всегда - внутренняя область сферы $\mathcal{S}$ есть ловушка.

◆ Неподвижными точками модели Лоренца (L) является точка

$$"O" \quad (X = Y = Z = 0), \tag{6}$$

(начало координат), устойчивая при $r < 1$, и пара точек

$$"C_\pm" \quad (X_\pm = Y_\pm = \pm\sqrt{b(r-1)},\ Z_\pm = r - 1), \tag{7}$$

существующих при $r > 1$. Точки $C_\pm$ устойчивы при $r < r_c$, где

$$r_c = \sigma\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \tag{8}$$

На стандартной прямой при $r > r_c = 24.74$ движение хаотично.

◆ Зависимость показателя Ляпунова σ_1 (индекс поставлен, чтобы избежать путаницы с $\sigma = \nu/\kappa = \mathrm{Pr}$) от управляющего параметра r на стандартной прямой модели Лоренца исследована в численных экспериментах [FA84].

Отметим характерные значения r на стандартной прямой.

r	
24.06	Рождение странного аттрактора. Точки $C_\pm$ еще устойчивы, хаос не наблюдаем.
24.74	Точки $C_\pm$ теряют устойчивость - **кризис**? $\sigma_1 \approx 0.8$.
48.03	Первое окно периодичности (ширина $\Delta r = 2.3 \cdot 10^{-3}$)
148.4	Левая граница большого окна периодичности: F - сценарий.
166.07	Правая граница большого окна периодичности: PM - сценарий.
171	Максимум показателя Ляпунова: $\sigma_1 \approx 2.2$
210	Граница хаоса: F - сценарий.
227	Бифуркация удвоения периода.

Апертура существования хаоса на стандартной прямой модели (L) довольно велика: $A = \ln(210/24) = 2.17$

[FA84] - Froyland J., Alfsen K.H. - Phys. Rev. A, 1984, 29, 5, 2928-31.

◆ Очертания хаотического аттрактора модели Лоренца могут быть намечены с помощью "точка-тире теоремы" (§ 1.02) о равенстве нулю среднего значения производной по времени от ограниченной динамической величины. В частности, средние значения обеих частей уравнений движения при финитном движении равны нулю. Для модели Лоренца (L) это приводит к равенствам:

$$\overline{\dot{X}} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{X} = \overline{Y}, \tag{9}$$

$$\overline{\dot{Y}} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{XZ} = r\overline{X} - \overline{Y} = (r-1)\overline{X}, \tag{10}$$

$$\overline{\dot{Z}} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{XY} = b\overline{Z}, \tag{11}$$

$$\overline{\dot{X^2}} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{X^2} = \overline{XY} > 0. \tag{12}$$

Из двух последних соотношений вытекает неравенство $\overline{Z} > 0$. Последнее неравенство означает, что X и Y имеют преимущественно одинаковые знаки - имеют тенденцию к 1 и 3 квадрантам плоскости OXY.

◆ Рассмотрим структуру хаотического аттрактора модели Лоренца. По гипотезе Каплана - Йорке (§13.05) фрактальная размерность аттрактора есть

$$D_F = 2 + \frac{\sigma_1}{|\sigma_3|} \le 2.14 \tag{13}$$

($\max\sigma_1 = 2.2$ - см. таблицу; $\sigma_1 + \sigma_3 = -\Lambda$ по теореме **T3** в §11.01; $\Lambda = \sigma + 1 + b = 13.67$). Поскольку значение D_F близко к "2", аттрактор похож на плоскую фигуру в 3-х мерном пространстве. Обычно

[5, с.108 • 7, с.127 • 8, с.42 • 9, с.143].

в качестве иллюстрации приводят построенную О. Лэнфордом (O. Lanford, 1977) картинку, на которой изображены первые пятьдесят петель одной ветви неустойчивого многообразия начала координат для классического аттрактора Лоренца: $r = 28$. Такую подмену можно оправдать. Если седловая точка лежит в ловушке, то ее неустойчивое многообразие W_u целиком принадлежит ловушке. При $t \to \infty$ фазовая точка, двигаясь по множеству W_u, неограниченно приблизится к аттрактору. Если диссипация системы велика, $\Lambda >> 1$, то сближение идет быстро. Поэтому странный аттрактор можно локально аппроксимировать неустойчивыми многообразиями седловых точек.

§ 15.02 Модель Лоренца: спектр переменной X

◆ Найдем приближенное выражение для формы спектра мощности $S(\omega)$ переменной X в модели Лоренца [AW88].

[AW88] - P.L. Andrews P.L., Waltz R.E. - Phys. Fluids, 1988, 31, 3168.

Функции X, Y и Z могут быть представлены фурье-амплитудами

$$X(t)=\int X(\omega)e^{i\omega t}dt,\qquad X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int X(t)e^{-i\omega t}dt \tag{14}$$

Фурье - преобразование системы Лоренца (L) превращает ее в систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
&i\omega X=-\sigma X+\sigma Y,\\
&i\omega Y=rX-Y-\int X(\omega_1)Z(\omega-\omega_1)d\omega_1, \qquad\qquad (\mathrm{LF})\\
&i\omega Z=-bZ+\int X(\omega_1)Y(\omega-\omega_1)d\omega_1.
\end{aligned}$$

Разрешая уравнение (LF_1) относительно Y, а (LF_3) - относительно Z,

$$Y=\left(1+i\frac{\omega}{\sigma}\right)X,\quad Z=\frac{1}{b+i\omega}\int X(\omega_1)Y(\omega-\omega_1)d\omega_1, \tag{15}$$

и подставляя эти выражения в (LF_2), получаем **одно** уравнение для $X(\omega)$:

$$\left[r-(1+i\omega)\left(1+i\frac{\omega}{\sigma}\right)\right]X= \qquad\qquad (\mathrm{FX})$$

$$=\int X(\omega_1)\frac{d\omega_1}{b+i(\omega-\omega_1)}\int X(\omega_2)\left[1+i\frac{(\omega-\omega_1-\omega_2)}{\sigma}\right]X(\omega-\omega_1-\omega_2)d\omega_2$$

◆ Упростим уравнение (FX), используя *приближение случайных фаз*:

$$\overline{X(\omega_1)X(\omega_2)}=S(\omega_1)\delta(\omega_1+\omega_2), \tag{16}$$

где $S(\omega_1)$ - спектр мощности. Такое предположение обеспечивает стационарность движения - независимость корреляционной функции от начала отсчета времени.

$$\begin{aligned}
\overline{X(t)X(t+\tau)}&=\overline{\int X(\omega_1)e^{i\omega_1 t}d\omega_1\int X(\omega_2)e^{i\omega_1(t+\tau)}d\omega_2}=\\
&=\int S(\omega_1)e^{i\omega_1\tau}d\omega_1=B_X(\tau).
\end{aligned} \tag{17}$$

Последний переход основан на определении спектра мощности (§ 2.2). В правой части (FX) возможны три спаривания аргументов спектральных амплитуд: $\sim\delta(\omega_1+\omega_2)$, $\sim\delta(\omega-\omega_2)$ и $\sim\delta(\omega-\omega_1)$. В итоге, сокращая обе части на $X(\omega)$ и учитывая четность $S(\omega)$, получаем уравнение

$$\left[r-(1+i\omega)\left(1+i\frac{\omega}{\sigma}\right)\right]=\frac{1}{b}\int S(\omega_1)\left[1+\frac{b(\sigma+i(\omega-\omega_1))}{\sigma(b+i(\omega-\omega_1))}\right]d\omega_1 \tag{18}$$

◆ Для простоты примем что спектр мощности имеет лоренцеву форму:

$$S = E \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, \tag{19}$$

где $E = \int S(\omega) d\omega$ называется *энергией моды*, а γ - скорость перемешивания - определяет ширину спектра.

Приравнивая коэффициенты при ω^0 в обеих частях (18), получаем

$$r - 1 = \frac{E}{b}\left[1 + \frac{b(\sigma + \gamma)}{\sigma(b + \gamma)}\right] = E\frac{C(\gamma)}{b} \tag{20}$$

где $C(\gamma)$ слабо зависит от γ: $C(0) = 2$, $C(\infty) = 1 + (b/\sigma) = 1.26$. Считая C константой, получаем выражение для E:

$$E \approx \frac{b}{C}(r - 1)$$

Энергия моды пропорциональна превышению значения управляющего параметра r над порогом конвекции. Эта формула хорошо согласуется с данными численного эксперимента при $C = 1.6$ в диапазоне $25 < r < 200$.

◆ Приравнивая коэффициенты в при ω^1 в обеих частях (18), получаем

$$1 + \frac{1}{\sigma} = E\left[\frac{1}{(\gamma + b)^2} - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\gamma + b}\right], \tag{21}$$

откуда

$$\gamma = \frac{2\sigma}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma(\sigma + 1)}{E}}} - b. \tag{22}$$

Формула (22) дает порог хаоса ($\gamma = 0$) при $r_c = 1 + 2b(\sigma + 1)(\sigma - b)^{-1} = 9$. При $r \to \infty$ γ стремится к постоянному значению $\gamma(\infty) = \sigma - b = 7.33$.

✧ Лоренцева форма спектра (19) соответствует экспоненциальной корреляционной функции $B_x(\tau) = E\exp(-\gamma\tau)$. Формула (22) показывает, что с ростом r $\gamma(r)$ медленно растет. Такую же тенденцию поведения имеет $\sigma(r)$ в диапазоне $25 < r < 170$; численно $\gamma(r) \approx 2.5\sigma(r)$.

EOL/EOC

☯☯