ЛЕКЦИЯ #13
ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 3
ОТОБРАЖЕНИЕ ХЕНОНА
ФРАКТАЛЫ

§ 13.01 Сценарий Помо - Манневиля: Переход к хаосу через перемежаемость - 2

◆ Продолжим рассмотрение перехода к хаосу через перемежаемость на основе отображения отрезка в себя, которое при малых x описывается зависимостью

$$x' = x + x^2 + \varepsilon \qquad (1)$$

При $\varepsilon \ll 1$ изменение x за одну итерацию мало, и отображение может быть заменено дифференциальным уравнением (ср. § 4.02 и § 6.03):

$$\frac{dx}{dn} = x^2 + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{tg}\, n\sqrt{\varepsilon} \qquad (2)$$

Время (число шагов) выхода фазовой точки из ламинарной зоны равно

$$N(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right], \qquad (3)$$

после чего фазовая точка вновь попадает в турбулентную зону.

◆ Будем считать, что из турбулентной зоны фазовая точка возвращается в ламинарную зону в **ñëó÷àéí î** распределенные точки x_0. При $\lambda \ll 1$ функцию распределения можно считать равномерной:

$$W(x_0) \approx \mathrm{const} \cong (2\lambda)^{-1} \quad (|x_0| < \lambda), \qquad W(x_0) \cong 0 \quad (|x_0| > \lambda) \qquad (4)$$

Средняя длительность $\overline{N}$ (число шагов) фазы ламинарного движения

$$\overline{N} = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} N(x_0)\,dx_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right). \qquad (5)$$

При $\varepsilon \to 0$ величина $\overline{N}$ почти не зависит от λ: $\overline{N} \approx \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

◆ Рассмотрим поведение показателя Ляпунова при переходе к хаосу по сценарию PM. Найдем фактор ламинарной неустойчивости Σ_L - средний вклад в $\Sigma \ln|A(x_n)|$ от движения в ламинарной зоне:

$$\Sigma_L(x_0) = \sum_{n=0}^{N(x_0)} \ln|1 + 2x_n| \approx \int_0^N \ln|1 + 2x(n)|\,dn \approx \int_{x_0}^{\lambda} \frac{\ln(1+2x)}{x^2 + \varepsilon}\,dx. \qquad (6)$$

При $\lambda \ll 1$ можно разложить логарифм в ряд. Тогда

$$\Sigma_L(x_0) \approx \ln\left(\frac{\varepsilon+\lambda^2}{\varepsilon+x_0^2}\right). \tag{7}$$

Усредняя величину $\Sigma_L(x_0)$ с функцией распределения $W(x_0)$ (4), получаем

$$\Sigma_L = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}\Sigma_L(x_0)dx_0 \approx 2-2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{8}$$

При $\varepsilon \to 0$ эта величина почти не зависит от λ: $\Sigma_L = 2$. Прохождение фазовой точкой турбулентной зоны вносит в $\Sigma \ln|A(x_n)|$ некоторый положительный вклад Σ_T. Пренебрегая длительностью пребывания точки в турбулентной зоне, для показателя Ляпунова I - модели получаем оценку

$$\sigma \approx \kappa\sqrt{\varepsilon} \tag{9}$$

где

$$\kappa = \frac{2}{\pi}(2+\Sigma_T) > 1.273 \tag{10}$$

Зависимость показателя Ляпунова от превышения порога является мягкой.

✧ Простая модель отображения отрезка $(0,1)$ на себя, локально описываемая формой (1), дается формулами

$$x' = 1-\mu x\left(\frac{1}{2}-x\right) \quad \left(x<\frac{1}{2}\right), \qquad x' = 2x-1 \quad \left(x>\frac{1}{2}\right).$$

Порогу хаоса соответствует значение $\mu_c = 6+\sqrt{32} = 11.6568$. Численные расчеты дают для этой модели значение $\kappa \approx 7.4$.

§ 13.02 Кризисы и сценарий GOY

◆ Для логистического отображения при **уменьшении** μ в точке $\mu_f = 4$ имеется порог рождения хаоса при разделении странного аттрактора и неустойчивой неподвижной точки. Перестройка хаотического аттрактора (рождение, уничтожение, изменение формы) в результате совпадения неустойчивого инвариантного множества с границей аттрактора называется *кризисом* (**crisis**). Возникновение хаотических аттракторов через кризис было исследовано Гребоги, Оттом и Йорке [GOY83] и образует *GOY-сценарий* перехода к хаосу.

✧ Отметим сходство и контраст с PM-сценарием: в PM хаос **исчезает** при рождении пары устойчивого и неустойчивого множеств (точек или циклов); в GOY хаос **исчезает** при столкновении устойчивого (хаотического) аттрактора и неустойчивой неподвижной точки.

◆ Описанный выше тип кризиса, при котором неустойчивая точка сливается с хаотическим аттрактором на его границе, называется *граничным кризисом* (boundary crisis). У логистического отображения имеется и другой тип кризиса.

В окне периодичности W_3 неустойчивый цикл длины 3 при увеличении μ сталкивается с полосами хаотического аттрактора, возникшего по F-сценарию. В результате скачком изменяется размер аттрактора. Соответствующие значения параметра μ таковы: $\mu_{W3F} = 3.8495$, $\mu_{W3GOY} = 3.8658$ $(\delta\mu \approx 1.6 \cdot 10^{-2})$. Такой тип перестройки аттрактора называется *внутренним кризисом* (interior crisis).

[GOY83] - Grebogi C., E. Ott E., Yorke J.A. - Physica D, 1983, 7, 181-200.

§ 13.03 Отображение Хенона: определение, неподвижные точки хаотический аттрактор

[2, с.419-422 • 5, с.112-115 • 7, с.141• 8, с.37-40 • 9, с.148-154].

В качестве примера двумерных диссипативных отображений рассмотрим отображение Хенона.

◆ *Отображением Хенона* (Henon mapping) [H76] называется динамическая система - отображение с динамическими переменными x, y, параметрами a, b и уравнениями движения

$$x' = 1 + y - ax^2, \qquad y' = bx. \tag{11}$$

[H76] - Henon M. - Commun. Math. Phys., 1976, 50, 69.

♦ Отображение (11) - его оператор будем обозначать через $\hat{\mathrm{H}}$ - обратимо Якобиан отображения имеет постоянную величину: $J = \mathrm{Det}\,\hat{A} = -b$. Диссипация системы (см. § 3.02) $\Lambda(\vec{x}) = -\ln|b|$ постоянна. При $|b| < 1$ (11) есть сжимающее отображение.

♦ Координаты неподвижных точек $\vec{o}_\pm$ отображения (11) определяются формулами

$$x_\pm = \frac{1}{2a}\left[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}\right], \qquad y_\pm = bx_\pm \tag{12}$$

(в численных примерах $b = 0.3$). При $a \to 0$,

$$x_+ \approx \frac{1}{1-b}, \quad x_- \approx -\frac{1-b}{a} \to \infty. \tag{13}$$

При $a \to \infty$,

$$x_+ \approx -x_- \approx \frac{1}{\sqrt{a}} \to 0. \tag{14}$$

Точка $\vec{o}_- = (x_-, y_-)$ всегда неустойчива, а точка $\vec{o}_+ = (x_+, y_+)$ устойчива при $a < a_1 = 3(1-b^2)/4 = 0.3675$. При $a > a_1$ начинается каскад бифуркаций удвоения, приводящий к возникновению хаоса по F-сценарию при $a_c = 1.058$. При $a_c < a < a_* = 1.55$ система совершает апериодическое движение.

♦ Найденный в численном эксперименте хаотический аттрактор отображения Хенона [2, с.421; 5, с.114; 7, с.142; 8, с.39; 9, с.149] имеет вид пучка параболических дуг, охватывающих начало координат. Можно указать область $\mathcal{S}$, которая оператором $\hat{\mathrm{H}}$ отображается в себя и содержит все точки аттрактора. Неподвижная точка $\vec{o}_+$ лежит на внешней границе аттрактора, а собственный вектор матрицы устойчивости $\hat{A}(\vec{o}_+)$, соответствующий неустойчивому направлению ($|\lambda_1| > 1$), касателен к внешней кривой аттрактора. Таким образом, аттрактор модели Хенона тесно связан с неустойчивым многообразием W_u седловой неподвижной точки $\vec{o}_+$.

♦ Найдем приближенное аналитическое выражение для формы аттрактора отображения Хенона. При малом b значения y малы, поэтому можно принять в нулевом приближении $y = 0$. Из (11_1) $x' = 1 - ax^2$, а из (11_2) $x = y'/b$. Подставляя второе выражение в первое и опуская штрихи, получаем уравнение для аттрактора первого приближения:

$$x = 1 - \frac{a}{b^2} y^2. \tag{15}$$

Во втором приближении возьмем из (15) $y = \pm \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{1-x}$. Подстановка в первое из уравнений отображения дает

$$x' = 1 \pm \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{1-x} - ax^2 \tag{16}$$

Подставляя из второго из уравнений отображения $x = y'/b$ и опуская штрихи, получаем уравнение для аттрактора второго приближения формулу:

$$x = 1 - \frac{a}{b^2} y^2 \pm \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - \frac{y}{b}} \tag{17}$$

В этом приближении аттрактор имеет две ветви. Дальнейшие итерации увеличивают число ветвей параболических кривых. Ту же картину дают численные эксперименты: при последовательных итерациях число наблюдаемых ветвей аттрактора увеличивается, стремясь к бесконечности. Аттрактор модели Хенона есть система квазипараллельных линий; поперечная структура которой самоподобна, как *канторово множество*.

§ 13.04 Канторово множество и фракталы

♦ *Канторово множество* в широком смысле определяется как компактное, нигде не плотное, несчетное множество. Примером является канторово множество крайних третей $\mathbf{C}_{02}$ (G. Cantor, 1883). Для системы отрезков установим процедуру устранения из каждого данного отрезка его средней трети. Начиная с отрезка $[0,1]$, повторим процедуру бесконечное число раз. Множество точек, остающееся в пределе, есть множество $\mathbf{C}_{02}$.

1. Мера множества $\mathbf{C}_{02}$ равна нулю. Суммарная длина удаленных отрезков,

$$L_\Sigma = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \frac{1/3}{1-2/3} = 1, \tag{18}$$

совпадает с длиной начального отрезка.

2. Множество $\mathbf{C}_{02}$ несчетно - равномощно множеству точек отрезка $[0,1]$. Точки $\mathbf{C}_{02}$ определяются в троичной системе числами $\{0; a_1, a_2, a_3, ..\}$ с $a_i = 0$ или 2. Заменив символ "2" на "1", получим все числа из отрезка $[0,1]$ в двоичной записи.

◆ Множество $\mathbf{C}_{02}$ обладает *самоподобием*: оно может быть разбито на N $(=2^k)$ множеств, подобных исходному, но имеющих в n $(=3^k)$ раз меньший масштаб длины. Для самоподобного множества M величина

$$D_S = \frac{\ln N}{\ln n} \tag{19}$$

называется *размерностью самоподобия* (similarity dimension).

✧ Величина D_S называется размерностью, так как для отрезка, квадрата и куба (самоподобных множеств) $D_S = 1,2,3$ соответственно, в согласии с векторной их размерностью. Для канторова множества $\mathbf{C}_{02}$ $D_S = \ln 2 / \ln 3 = 0.631$

◆ Для множеств без регулярной структуры необходимо более широкое определение размерности. Если ограниченное множество M принадлежит d-мерному евклидову пространству $\mathbf{R}^d$, и $N(\varepsilon)$ есть минимальное число d-мерных кубов со стороной ε, накрывающих все точки множества, то величина

$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{|\ln \varepsilon|} \tag{20}$$

называется *емкостью* (capacity), или *фрактальной размерностью* (fractal dimension), множества M.

✧ Подсчет числа занятых точками инвариантного множества квадратов с уменьшающимися сторонами использовался при численном расчете меры хаотической компоненты стандартного отображения (§ 4.04). Таким образом, в [UF85] показано, что фрактальная размерность хаотической компоненты стандартного отображения равна двум: $D_F = 2$.

✧ Для множества $\mathbf{C}_{02}$ емкость и размерность самоподобия равны: $D_S = D_F$.

◆ Множества с нецелыми значениями емкости D_F называются *фракталами* (**fractals**) (B. Mandelbrot, 1975).

§ 13.05 Фракталы и хаос

📖 [3, с.233(?) • 4, с.424 • 5, с.130• 6, с.66 • 7, с.146].

◆ Аттрактор - фрактал называются *странным аттрактором* (strange attractor). Хаотические аттракторы обычно являются странными.

✧ Термин "странный аттрактор" введен Рюэлем и Такенсом в 1971 г. [RT71] при рассмотрении структуры проекции аттрактора системы - потока с $K=4$ на сечение Пуанкаре.

[RT71] - Ruelle D., Takens F. - Commun. Math. Phys., 1971, 20, 167-92.

✧ Хаотический аттрактор **не обязательно** странный. Например, для логистического отображения при $\mu=4$ инвариантная плотность $W(x)$ непрерывна (§ 12.03), откуда следует $D_F=1$.

✧ Странный аттрактор **не обязательно** хаотический. Например, для логистического отображения на границе каскада удвоений периода, при $\mu=\mu_c=3.5699$, фрактальная размерность аттрактора $D_F=0.538$ [ChM84], а показатель Ляпунова $\sigma(\mu_c)=0$. Другие примеры приведены в [G+84].

[ChM84] - Chang S.-J., McCown J. - Phys. Rev. A, 1984, 30, 2, 1149-51.

[G+84] - Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. - Physica D, 1984, 13, 261-8.

◆ Фрактальная размерность аттрактора связана с показателями Ляпунова. Рассмотрим эту связь на примере диссипативного двумерного отображения $\hat{T}$ с характеристическими показателями Ляпунова $\sigma_1>0>\sigma_2$. Векторы, направленные вдоль собственного вектора неустойчивого направления, растягиваются (в среднем) в $\lambda_1=e^{\sigma_1}>1$ раз, векторы вдоль собственного вектора устойчивого направления (в среднем) сжимаются - умножаются на фактор $\lambda_2=e^{\sigma_2}<1$. Накроем аттрактор квадратами со стороной ε и сделаем n итераций. Накрывая возникший при преобразовании параллелограмм квадратами со стороной $\lambda_2^n\varepsilon$, получаем:

$$N\left(\lambda_2^n\varepsilon\right)=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n N(\varepsilon) \tag{21}$$

Считая, что $N(\varepsilon)=A\varepsilon^{-D}$, получаем:

$$D_F=1+\frac{\sigma_1}{|\sigma_2|}. \tag{22}$$

✧ Для аттрактора Хенона $(a=1.4, b=0.3)$ $D_F=1.264$.

◆ Обобщение приведенного выше рассуждения на случай аттрактора в K-мерном фазовом пространстве позволяет заключить следующее.

KY Если для динамической системы K-мерным фазовым пространством движение на аттракторе обладает спектром характеристических показателей Ляпунова $\{\sigma_i\}$ $(1\le i\le K)$, и k - наибольшее целое число такое, что

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i > 0,$$

то фрактальная размерность аттрактора дается выражением

$$D_F = k + \frac{1}{|\sigma_{k+1}|} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \qquad (23)$$

Это утверждение составляет *гипотезу Каплана - Йорке* (J. Kaplan, J.A. Yorke, 1979).

✧ Величина в правой части формулы (23) есть *ляпуновская размерность* D_L. Гипотеза **KY** состоит в том, что $D_F = D_L$. Строго доказано, что в общем случае $D_F \geq D_L$. В типичных примерах $D_F - D_L \cong (2 \div 5) \cdot 10^{-3} << D_F$, и различием можно пренебречь.

◆ Следствия гипотезы Каплана - Йорке.

1. Для гамильтоновых (.) систем размерность хаотической компоненты равна размерности фазового пространства: $D_F = K$. Действительно, из теоремы о симметрии спектра ХПЛ (**T2** в §10.06) имеем $k = K-1$, $\sum_{i=1}^{K-1} \sigma_i = -\sigma_K$ - и по гипотезе (KY) $D_L = K = D_F$.

2. Для потоков в системах с положительной диссипацией $D_F > 2$. По определению хаотического движения (§2.03) $\sigma_1 > 0$. По теореме о нулевом характеристическом показателе (**T1** в §10.06) $\sigma_2 \geq 0$. Отсюда $k \geq 2$ и $D_F \geq k \geq 2$.

EOL ☯