ЛЕКЦИЯ #12
ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ
СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ

§ 12.01 Сценарий Фейгенбаума - 2

◆ Сценарий Фейгенбаума обладает, кроме указанного в предыдущем параграфе свойства самоподобия порогов удвоения, и другими универсальными свойствами. В частности, геометрическая структура аттракторов регулярного движения при приближении к порогу хаоса обладает свойствами самоподобия.

> **F2** Если одна из точек x^* цикла длины 2^n есть точка суперстабильности, а d_n есть (алгебраическое) расстояние от x^* до ближайшей к ней точки цикла, то для отображений с одним квадратичным максимумом отношение расстояний d_n при последовательных бифуркациях стремится к универсальному пределу:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n+1}}=\alpha,$$
>
> где $\alpha=-2.5029...$ называется *числом Фейгенбаума* α.

◆ Рассмотрим универсальные свойства последовательных бифуркаций удвоения периода простым методом, основанным на идее локальной замены квадрата логистического отображения самим логистическим отображением. Пусть $\mu>3$ и существует цикл длины 2:

$$x_{2+}=\hat{M}(x_{2-}),\qquad x_{2-}=\hat{M}(x_{2+}). \tag{1}$$

Положение точек x_{2+} и x_{2-} дается найденным выше выражением:

$$x_{2\pm}=\frac{1+\mu\pm\sqrt{\mu^2-2\mu-3}}{2\mu}. \tag{2}$$

Рассмотрим поведение при последовательных отображениях точки, близкой к x_{2-}: положим $x=x_{2-}+\xi_-$, где ξ_- мало. Тогда при первой итерации имеем

$$x'=x_{2+}+\mu(1-2x_{2-})\xi_- -\mu\xi_-^2=x_{2+}+\xi_+. \tag{3}$$

Как и должно быть, преобразованная точка близка к x_{2+}. Сделаем еще одну итерацию:

$$x''=x_{2-}+\mu(1-2x_{2+})\xi_+ -\mu\xi_+^2. \tag{4}$$

Исключая с помощью предыдущего уравнения значение ξ_+ и пренебрегая всеми степенями ξ_- выше второй, получаем для ξ_- закон преобразования

$$\xi_-'=-a\xi_- +b\xi_-^2, \tag{5}$$

где коэффициенты a и b суть

$$a = \mu^2 - 2\mu - 4 > 0, \qquad b = \mu\left(3\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} - \mu^2 + 2\mu + 3\right). \quad (6)$$

Таким образом, изменение малого отклонения ξ_- от точки x_{2-} цикла C_2 при **двукратном** применении логистического отображения $\hat{M}$ описывается **однократным** квадратичным преобразованием $\hat{M}'$, которое отличается от $\hat{M}$ лишь линейной заменой переменных.

◆ Для того, чтобы свести отображение $\hat{M}'$ к виду $\hat{M}$, надо сдвинуть начало отсчета к другому корню (ξ_2), изменить направление оси независимой переменной и изменить масштаб. Проделаем эти преобразования. Точка ξ_2 определяется корнем уравнения $\xi = -a\xi + b\xi^2$, откуда

$$\xi_2 = \frac{a+1}{b}. \quad (7)$$

Положим $\eta = \xi_2 - \xi$ (перенос начала и изменение направления оси); тогда

$$\frac{a+1}{b} - \eta' = -a\left(\frac{a+1}{b} - \eta\right) + b\left(\frac{a+1}{b} - \eta\right)^2. \quad (8)$$

Отсюда после упрощений находим

$$\eta' = (a+2)\eta - b\eta^2. \quad (9)$$

Теперь сделаем третий шаг - изменений масштаба переменных. Положим $y = \eta/\alpha$, где

$$\alpha = \frac{b}{a+2}. \quad (10)$$

Тогда преобразование $\hat{M}'$ примет вид логистического отображения $\hat{M}$:

$$y' = \mu' y(1-y). \quad (11)$$

Роль параметра μ теперь играет величина

$$\mu' = a + 2 = \mu^2 - 2\mu - 2. \quad (12)$$

Это уравнение позволяет сделать ряд выводов о характере каскада бифуркаций удвоения периода.

◆ **Во-первых**, уравнение (12) позволяет определить условия второй бифуркации. Бифуркация удвоения периода для отображения $\hat{M}$ происходит при $\mu = 3$. Следовательно, при $\mu' = 3$ должна произойти бифуркация $\hat{M}^2$, приводящая к возникновению цикла C_4. Из уравнения

$$\mu' = 3 = \mu_2^2 - 2\mu_2 - 2 \quad (13)$$

получаем значение $\mu_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.4495$, совпадающее с найденным выше.

Во-вторых, уравнение (12) позволяет определить точку сгущения каскада удвоений периода - границу хаотического режима μ_c. Рекуррентное соотношение

$$\mu_n = \mu_{n+1}^2 - 2\mu_{n+1} - 2 \tag{14}$$

показывает, что каскад удвоений закончится по достижении параметром μ значения μ_c, которое является неподвижной точкой отображения (14):

$$\mu_c^2 - 3\mu_c - 2 = 0, \tag{15}$$

откуда

$$\mu_c = \frac{3+\sqrt{17}}{2} = 3.5615. \tag{16}$$

Это приближенное значение μ_c отличается от точного $\mu_c = 3.5699$ только на 0.2%.

В-третьих, уравнение (12) позволяет определить величину константы Фейгенбаума δ. Допустим, что

$$\mu_n = \mu_c - A\delta^{-n}. \tag{17}$$

Подставляя эту зависимость в уравнение (14) и удерживая линейные по A члены, имеем

$$\mu_n = \mu_c - A\delta^{-n} = \mu_c^2 - 2\mu_c A\delta^{-n-1} - 2\mu_c + 2A\delta^{-n-1} - 2, \tag{18}$$

откуда находим

$$\delta = 2\mu_c - 2 = 1 + \sqrt{17} = 5.1231 \tag{19}$$

Это значение δ отличается от точного $\delta = 4.6692$ на 9.7%.

В-четвертых, уравнение (12) позволяет определить величину константы Фейгенбаума α. Переход от n-й к $(n+1)$-й бифуркации соответствует сжатию поперечного масштаба в $\alpha = b/(a+2)$ (см. (10)) раз. Подставляя в это выражение найденное выше значение μ_c (16), получаем

$$\alpha = \frac{\sqrt{17}+1}{2} - 3\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} = -2.2399 \tag{20}$$

Это значение α отличается от точного $\alpha = -2.5029$ на 11.7%.

Результаты оказались приближенными, так как основывались на сведении второй бифуркации к первой - вместо $(n+1)$-й к n-й при $n \to \infty$.

◆ Утверждения **F1** и **F2** описывают универсальные характеристики в области ниже порога хаоса. Такие характеристики имеются и в области выше порога. Примером служит универсальное поведение показателя Ляпунова. Вблизи порога хаоса при $\mu \ge \mu_c$ зависимость $\sigma(\mu)$ для отображений с одним квадратичным максимумом имеет вид [HR80]

$$\sigma \sim (\mu - \mu_c)^{\eta}, \qquad \eta = \frac{\ln 2}{\ln \delta} = 0.4498. \tag{21}$$

Зависимость показателя Ляпунова от превышения порога является мягкой.

[HR80] - Huberman B.A., Rudnik J. - Phys. Rev. Lett., 1980, 45, 154

§ 12.02 Логистическое отображение: показатель Ляпунова

◆ Для логистического отображения численный эксперимент дает зависимость показателя Ляпунова σ от управляющего параметра μ, показанную в [2, с.443; 5, с.47]. В области $\mu_c < \mu < \mu_f = 4$ (граница финитности) показатель Ляпунова в общем возрастает при увеличении μ. Обратимся к аналитическому расчету зависимости $\sigma(\mu)$.

◆ Для отображения $x' = \hat{T}(x)$ функция $W(x)$ называется *инвариантной плотностью* (invariant density), если интеграл от нее по любой области A и по ее **прообразу** $\hat{T}^{-1}A$ равны:

$$\int_A W(x)dx = \int_{\hat{T}^{-1}A} W(x)dx. \tag{22}$$

Если отображение задано гладкой функцией, $x' = F(x)$, то из определения (22) следует *уравнение Фробениуса - Перрона* для функции $W(x)$:

$$W(x) = \sum_i \frac{W(y_i)}{|F'(y_i)|}, \tag{23}$$

где суммирование идет по всем точкам y_i таким, что $F(y_i) = x$. Существование инвариантной плотности позволяет обобщить на диссипативные системы эргодическую теорему Биркгофа - Хинчина.

ET-D Среднее по времени значение динамической величины $a(x_n)$ равно ее среднему значению по фазовому пространству, вычисленному с весом - инвариантной плотностью:

$$\overline{a(x)} = \int a(x) W(x) dx.$$

◆ Используем это соотношение для вычисления показателя Ляпунова логистического отображения усреднением показателя локальной неустойчивости $\sigma(x)$. Для одномерных отображений такая процедура **точна**:

$$\sigma = \int \sigma(x) W(x) dx, \qquad (24)$$

где показатель локальной неустойчивости логистического отображения

$$\sigma(x) = \ln|A(x)| = \ln(\mu|1-2x|). \qquad (25)$$

◆ Решение уравнения (23) для логистического отображения при $\mu = 4$ было найдено Уламом и Нейманом [UN47]. Оно имеет вид

$$W(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \qquad (26)$$

откуда получается значение $\sigma(4) = \ln 2 = 0.6931$.

[UN47] - Ulam S.M., von Neumann J. - Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 1120.

При других значениях μ вид функции $W(x)$ с нужной точностью может быть найден решением уравнения (23) методом итераций.

◆ Примем простейшее предположение: будем считать, что инвариантная плотность $W_0(x)$ **постоянна** в области $x_- \le x \le x_+$, где

$$x_+ = \max F = \frac{\mu}{4}, \quad x_- = F(x_+) = \frac{4\mu^2 - \mu^3}{16} \qquad (27)$$

Тогда

$$W_0(x) = \frac{16}{\mu^3 - 4\mu^2 + 4\mu} \qquad (28)$$

Интеграл в (12) вычисляется элементарно:

$$\sigma^{(0)}(\mu) = -1 + \ln\mu + \frac{8}{\mu^3 - 4\mu^2 + 4\mu} \ln\frac{\mu^4 - 6\mu^3 + 8\mu^2 + 8\mu - 16}{16}. \qquad (29)$$

Из найденного выражения следует, что $\sigma^{(0)}(\mu) > 0$ при $\mu > 3.81$: порог хаоса определен с относительной ошибкой $\delta = 7\%$.

§ 12.03 Окна периодичности

◆ На экспериментальном графике зависимости $\sigma(\mu)$ видно много узких полос, в которых $\sigma < 0$. Лежащие между областями хаотического движения интервалы значений управляющего параметра, в которых аттракторами являются устойчивые циклы, называются *окнами периодичности* (periodicity windows).

✧ Самым большим окном периодичности логистического отображения является окно W_3 цикла периода 3 и возникающих из него циклов $3 \cdot 2^n$. Область регулярного движения ограничена интервалом $\mu_{W3} = 3.8284 < \mu < \mu_{W3F} = 3.8495$.

◆ Связь между хаотическим движением и циклами отображения устанавливается следующей *теоремой Шарковского* [Ш64].

Sh Пусть $\hat{T}$ - отображение отрезка I в себя ($x \in I \Rightarrow \hat{T}x \in I$), заданное непрерывной функцией, $x' = F(x)$. Если отображение $\hat{T}$ имеет периодическую точку периода 3, то оно имеет периодические точки всех периодов.

[Ш64] - Шарковский А.Н. - Укр. матем. ж-л., 1964, 16, 1, 61-7.

◆ Теорема Шарковского была переоткрыта Ли и Йорке в 1975 г. [LY75]. Вместе с ней было доказано следующее утверждение.

LY Пусть $\hat{T}$ - отображение отрезка I в себя ($x \in I \Rightarrow \hat{T}x \in I$), заданное непрерывной функцией, $x' = F(x)$. Точка отрезка x называется *асимптотически периодической*, если существует такая периодическая точка p, что

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) - F^n(p) = 0.$$

Если отображение $\hat{T}$ имеет периодическую точку периода 3, то на отрезке I существует несчетное множество точек, не являющихся асимптотически периодическими.

✧ Название работы Ли и Йорке - "Period Three Implies Chaos" - стало первым случаем применения термина "хаос" в его современном значении и, превратившись в модный slogan, закрепило его употребление.

✧ Для логистического отображения оценка порога хаоса условием появления цикла периода 3 дает $\mu_{3C} = 3.8284 = 1.072\mu_c$. Формально такой критерий необоснован: только неустойчивость **всех** циклов **достаточна** для существования хаоса.

[LY75] - Li T.Y., Yorke J.A. - Amer. Math. Monthly, 1975, 82, 10, 985-92.

[2, с.440 • 3, с.173 • 7, с.156]

◆ Внутри окон периодичности циклы могут претерпевать удвоения периода, приводящие к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Последовательность таких бифуркаций обладает универсальными свойствами, отличающимися от указанных в **F1** и **F2** значениями констант. Так, для окна W_3 $\delta_{W3} = 55.247$, $\alpha_{W3} = -9.277$.

§ 12.04 Сценарий Помо - Манневиля: Переход к хаосу через перемежаемость

[3, с.246-261 • 5, с.83-106 • 6, с.99-103 • 7, с.168-171• 8, с.68 • 9, с.250-297]

♦ Бифуркация удвоения периода (§ 12.02) соответствует появлению корней уравнения $x = \hat{T}^2(x)$ через **трехкратный** корень. Возможно появление корней уравнения $x = \hat{T}^n(x)$ (неподвижных точек при $n = 1$, циклов при $n \geq 2$) через **двукратный** корень. Если при изменении управляющего параметра в области

$\lambda > \lambda_t$ появляется пара неподвижных точек (совпадающих при $\lambda = \lambda_t$), одна из которых устойчива, а другая неустойчива, то в точке $\lambda = \lambda_t$ происходит *тангенциальная бифуркация* (tangent bifurcation; saddle-node bifutcation).

◆ Тангенциальная бифуркация может соседствовать с хаосом (в области $\lambda < \lambda_t$). При уменьшении λ происходит слияние корней (*обратная тангенциальная бифуркация*). Появление хаоса в результате **исчезновения** устойчивого цикла, произошедшего за счет обратной тангенциальной бифуркации, называется переходом к хаосу через *перемежаемость* (**intermittency**)- *сценарием Помо - Манневиля* (РМ-сценарием).

[MP79] - Manneville P., Pomeau Y. - Phys. Lett. A, 1979, 75, 1-2, 1-2.

◆ Сценарий РМ обладает универсальными свойствами, которые удобно изучать на следующей I - модели одномерного отображения. Пусть $x' = \hat{T}(x)$ - отображение отрезка в себя, которое при малых x описывается зависимостью

$$x' = x + x^2 + \varepsilon \tag{30}$$

не имеет устойчивых неподвижных точек или циклов при $\varepsilon > 0$, а в остальном произвольно. При $\varepsilon < 0$ отображение имеет устойчивую неподвижную точку. При $\varepsilon = 0$ происходит тангенциальная бифуркация. Рассмотрим случай $\varepsilon > 0$. Разделим область движения на *ламинарную зону* L - область $|x| < \lambda << 1$, в которой применимо выражение (30) - и дополнение к ней - *турбулентную зону* T. В турбулентной зоне фазовая точка совершает нерегулярное движение, в ходе которого может попасть в точку x_0, лежащую в зоне ламинарности.

☯