ЛЕКЦИЯ #11

ХАОС В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 1

§ 11.01 Отбор моделей

◆ При рассмотрении консервативных систем нами были изучены модели двух классов:

- двумерные сохраняющие площадь отображения (стандартное (§ 3.03) и сепаратрисное (§ 7.04));

- трехмерные потоки в гамильтоновых системах (неавтономные модели - одномерный атом водорода во внешнем поле (§ 7.01), возмущенный маятник (§ 7.02); автономная модель - нелинейный осциллятор Паллена - Эдмондса (§ 9.01)).

◆ При изучении диссипативных систем будут рассмотрены модели того же уровня сложности: двумерные отображения и трехмерные потоки. Кроме того, будут рассмотрены одномерные диссипативные отображения. Финитность и экспоненциальная неустойчивость совместимы только для **необратимых** одномерных отображений ($\exists\ x_1, x_2$ такие, что $\hat{T}(x_1) = \hat{T}(x_2)$).

✧ Примером одномерного диссипативного необратимого отображения с хаотической динамикой является рассмотренный в §2.02 линейный датчик случайных чисел $x' = \{Kx\}$.

◆ Физическая ценность одномерных моделей нуждается в обосновании. Оно таково. Для трехмерных потоков в системах с сильной (положительной) диссипацией траектория хаотического движения на сечении Пуанкаре обычно имеет вид узкой полосы, что позволяет описывать ее как одномерное множество и ограничиться рассмотрением эволюции одной переменной. В ряде случаев информацию о характере движения в системе можно получить из рассмотрения *отображения последования* (return map) - зависимости значения **одной** из динамических переменных при пересечении траекторией сечения Пуанкаре от åå значения при предшествующем пересечении, $x_{n+1} = R(x_n)$. Семейство таких зависимостей может быть использовано для моделирования свойств потока и в той области пространства параметров, где движение регулярно.

§ 11.02 Логистическое отображение: определение; неподвижные точки и циклы

🕮 [2, с.427-453 • 3, с.173,194,214 • 5, с.45-74 • 6, с.80-87 • 7, с.148-159 • 8-с.171-177].

◆ *Логистическим отображением* (logistic map) называется динамическая система - отображение с динамической переменной x, параметром μ и уравнением движения

$$x' = \mu x(1-x). \tag{LM}$$

◆ Оператор отображения (LM) обозначим $\hat{\mathrm{L}}$. При $\mu \le 4$ движение точки с начальным условием $0 < x_0 < 1$ финитно и ограничено областью $x \le x_+ = = \max F(x) = \mu/4$. Поэтому мы ограничимся рассмотрением области значений параметра $0 < \mu \le 4$.

◆ Неподвижные точки логистического отображения суть корни уравнения $x = \hat{\mathrm{L}}(x)$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1 - \frac{1}{\mu}. \tag{1}$$

Множитель устойчивости для (LM)

$$A(x) = \frac{dF}{dx} = \mu(1-2x), \tag{2}$$

$A(x_0) = \mu$: точка x_0 устойчива при $\mu < 1$; $A(x_1) = 2 - \mu$: точка x_1 устойчива при $1 < \mu < 3$. При $\mu = 1$ в системе происходит *бифуркация смены устойчивости*.

◆ Для одномерного отображения точки x_{ss}, в которых множитель устойчивости обращается в ноль, $A(x_{ss}) = 0$, называются *суперстабильными точками*. У логистического отображения - одна суперстабильная точка $x_{ss} = 1/2$.

◆ При $\mu > 3$ аттракторами логистического отображения будут не неподвижные точки, а более сложные множества, локализованные в интервале $x_- \le x \le x_+$, где

$$x_- = F(x_+) = \frac{4\mu^2 - \mu^3}{16}. \tag{3}$$

◆ Рассмотрим циклы длины 2 (ср. §6.1) логистического отображения. Точки цикла суть неподвижные точки отображения $\hat{\mathrm{L}}^2$ - корни уравнения $x = \hat{\mathrm{L}}^2 x$. Отличные от x_0 и x_1 неподвижные точки отображения $\hat{\mathrm{L}}^2$ определяются уравнением

$$\mu^2 x^2 - \left(\mu^2 + \mu\right)x + (1+\mu) = 0. \tag{4}$$

Корни этого уравнения,

$$x_{2\pm} = \frac{1 + \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}, \tag{5}$$

действительны при $\mu \ge 3$; при $\mu = 3$ $x_{2+} = x_{2-} = 2/3 = x_1$. В точке $\mu_1 = 3$ x_1 теряет устойчивость, и появляются две (совпадающие с x_1 при $\mu = \mu_1 = 3$) точки

x_{2+} и x_{2-}, образующие устойчивый цикл длины 2. Такая эволюция инвариантных множеств при изменении параметра называется *бифуркацией удвоения* (периода) (pitchfork bifurcation).

§ 11.03 Сценарий Фейгенбаума: переход к хаосу через последовательные удвоения периода

◆ Неподвижные точки $x_{2\pm}$ отображения $\hat{L}^2$ теряют устойчивость при $\mu_2 = 1+\sqrt{6} = 3.4495$; при этом значении μ происходит новая бифуркация удвоения - рождение устойчивого цикла длины 4; он теряет устойчивость при $\mu = \mu_3 = 3.5459$, вместе с рождением устойчивого цикла длины 8 etc.

◆ Бесконечная последовательность бифуркаций удвоения (period-doubling cascade) обладает универсальными свойствами, обнаруженными Фейгенбаумом в 1978 г. [F78]

F1 Для всех отображений $x' = F(x)$ с одним квадратичным максимумом функции F отношение разностей значений управляющего параметра, соответствующих последовательным бифуркациям удвоения периода, с ростом номера бифуркации стремится к универсальному пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=\delta,$$

где $\delta = 4.6692\ldots$ называется *числом Фейгенбаума* δ.

[F78] - Feigenbaum M.J. - J. Stat. Phys., 1978, 19, 1, 25-52.

✧ Аналогичный закон подобия выполняется для циклов стандартного отображения, аппроксимирующего золотой тор (§6.6)

Предельная точка последовательности бифуркаций для (LM)

$$\mu_c = 3.569945662\ldots$$

При $\mu \ge \mu_c$ финитное движение на аттракторе апериодично - возникает *хаотический аттрактор* (chaotic attractor).

◆ Эволюция регулярного движения, при которой с изменением управляющего параметра происходит бесконечная последовательность удвоений периода, приводящая к возникновению апериодического (хаотического) движения, называется *сценарием Фейгенбаума* (F-сценарием).

EOL
☯