# *ЛЕКЦИЯ #08*
# *СЕПАРАТРИСНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 2*
# *АВТОНОМНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ*

## *§ 8.01 Сепаратрисное отображение: неподвижные точки*

◆ Динамическая система - отображение цилиндра на себя с динамическими переменными $w,\psi$ и параметрами $L,\omega$, заданная уравнениями движения

$$w' = w + L\sin\psi, \qquad \psi' = \psi + \omega\ln\frac{32}{|w'|}, \tag{1}$$

называется *сепаратрисным отображением*.

◆ Сепаратрисное отображение (1) имеет два семейства неподвижных точек: $\vec{o}_{1m} = \{0,\pm w_m\}$ и $\vec{o}_{2m} = \{\pi,\pm w_m\}$, где

$$w_m = 32\exp\left(-\frac{2\pi m}{\omega}\right) \tag{2}$$

а $m$ - натуральное. При $m \to \infty$ точки сгущаются к линии $w = 0$.

◆ Рассмотрим сепаратрисное отображение вблизи неподвижных точек, линеаризованное **только по** $w$. Положим

$$w = w_m\left(1 - \frac{I}{\omega}\right), \qquad \psi = \pi + \theta \tag{3}$$

Тогда из первого уравнения (1a) сепаратрисного отображения

$$w_m\left(1 - \frac{I'}{\omega}\right) = w_m\left(1 - \frac{I}{\omega}\right) - L\sin\theta \tag{4}$$

и $I' = I + \dfrac{L\omega}{w_m}\sin\theta$: при выводе этого уравнения не сделано никаких приближений. Из второго уравнения, (1b), следует

$$\theta' = \theta + \omega\ln\frac{1}{1 - \dfrac{I'}{\omega}} \approx \theta + I' \tag{5}$$

В окрестностях неподвижных точек $w_m$ линеаризованное по $w$ сепаратрисное отображение есть **стандартное отображение** с параметром

$$K_m = \frac{L\omega}{w_m} = V\frac{\pi\omega^3}{16\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi\omega}{2}}e^{\frac{2\pi m}{\omega}} \approx \frac{\pi}{8}V\omega^3 e^{-\frac{\pi\omega}{2}+\frac{2\pi m}{\omega}} \tag{6}$$

С ростом $m$ $K_m$ неограниченно растет: при $K_m \geq 4$ - достаточно близко к сепаратрисе - отображению свойствен сплошной хаос (§ 4.04).

## § 8.02 *Размеры стохастического слоя стандартного отображения при* $K << 1$

◆ При сохранении в гамильтониане РПТ (§ 3.03, (2)) двух низших фурье - гармоник,

$$H = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta + 2K\cos\theta\,\cos 2\pi t, \tag{7}$$

стандартное отображение эквивалентно модели возмущенного маятника (1)

$$\frac{1}{K}H = \frac{I^2}{2} - \cos\theta - 2\cos\theta\,\cos\frac{2\pi}{\sqrt{K}}\tau \tag{8}$$

с параметрами $V = -2$ и $\omega = 2\pi/\sqrt{K}$.

◆ Определим полуширину стохастического слоя по (безразмерной) энергии $w_s$ как значение, для которого

$$K(w_s) = \frac{L\omega}{w_s} = 1. \tag{9}$$

Из выражения для $L$ и значения $\omega = 2\pi/\sqrt{K}$ получается значение $w_s$ для стандартного отображения:

$$w_s = \frac{64\pi^4}{K^{3/2}}\exp - \frac{\pi^2}{\sqrt{K}} \tag{10}$$

Из выражения (10) находится полуширина стохастического слоя по энергии $\Delta E_s = Kw_s$. Из (10) определяется полуширина стохастического слоя по действию для исходной системы:

$$\Delta I \approx \frac{\Delta E}{I} \approx \frac{Kw}{2\sqrt{K}} \approx \frac{\sqrt{K}}{2}w \quad \Rightarrow \quad \Delta I_s = \frac{\sqrt{K}}{2}w_s \tag{11}$$

◆ Оценим меру стохастической компоненты стандартного отображения при малых $K$ (узкий стохастический слой). Хаотическая компонента заполняет полосу ширины $2\Delta I_s$ вблизи двух ветвей сепаратрисы главного резонанса.

$$\mu \approx \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot 2\cdot 2\pi\cdot 2\Delta I_s \tag{12}$$

Подставляя (10) и (11) в (12), находим:

$$\mu(K) \approx \frac{64\pi^3}{K}\exp - \frac{\pi^2}{\sqrt{K}} \tag{13}$$

◆ График найденной из формулы (13) зависимости $\mu(K)$ в области $K \le 1$ схож с экспериментальной зависимостью, несмотря на рискованность экстраполяции из области $K << 1$ В области $K << 1$ мера стохастической компоненты монотонно растет с увеличением возмущения (подтверждается вывод **3** из § 6.06).

## *§ 8.03 Показатель Ляпунова сепаратрисного и стандартного ($K << 1$) отображений*

◆ Введем величину $s = w/w_s$ и запишем (1) в приведенном виде

$$s' = s + \frac{1}{\omega}\sin\psi, \qquad \psi' = \psi - \omega\ln|s'| + G \tag{14}$$

где величина $G = \omega\ln\frac{32}{w_s}$. Она определяет положение неподвижных точек, но не их устойчивость ($G$ не входит в $\hat{A}$).

◆ Матрица устойчивости приведенного сепаратрисного отображения:

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\cos\psi}{\omega} \\ -\dfrac{\omega}{s'} & 1 - \dfrac{\cos\psi}{s'} \end{vmatrix} \tag{15}$$

При $\omega >> 1$ $s' \approx s$, и собственные значения этой матрицы могут быть записаны в виде

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{\cos\psi}{2s} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\cos\psi}{s}\right)^2 - 1}; \tag{16}$$

они **не зависят** от $\omega$. Показатель Ляпунова $\sigma$ для приведенного сепаратрисного отображения при $\omega >> 1$ на зависит ни от $G$, ни от $\omega$ и есть универсальная константа $\zeta$. Ее значение, найденное Чириковым [Ch79]) в числовых экспериментах с $3 < \omega < 9$, равно

$$\zeta = 0.666(13). \tag{17}$$

✧ Вычислить универсальный показатель Ляпунова $\zeta$ (17) приведенного сепаратрисного отображения, используя метод усреднения показателя локальной неустойчивости (см. § 4.04 и вывод **5** из § 6.06). Считать, что стохастический слой сплошь заполняет область $|s| \le 1$, $0 \le \psi < 2\pi$.

◆ Найдем показатель Ляпунова для стандартного отображения ($K << 1$). Интервал времени $\tilde{T}(w)$, на котором осуществляется проход вблизи ветви сепаратрисы и реализуется один такт сепаратрисного отображения, есть

$$\tilde{T}(w) = \frac{1}{\omega_0}\ln\frac{32}{|w|} = \frac{1}{\sqrt{K}}\ln\frac{32}{|w|}, \tag{18}$$

где $\omega_0$ - частота малых колебаний маятника ($\omega_0 = 1$ в §7.03, $\omega_0 = \sqrt{K}$ для (18)). Оценим характерное время $\langle\tilde{T}\rangle$ для стохастического слоя как $\tilde{T}(w_s)$ Тогда для зависимости $\sigma(K)$ находим

$$\sigma(K) = \frac{\zeta}{\langle\tilde{T}\rangle} = \zeta\frac{K}{\pi^2 + \frac{3}{2}\sqrt{K}\ln K - \eta K}, \tag{19}$$

где $\eta = \ln\left(2\pi^4\right) = 5.27$. Асимптотика показателя Ляпунова стандартного отображения при **очень** малых $K$ имеет вид

$$\sigma(K) \approx \frac{\zeta}{\pi^2} K \approx 0.067K. \qquad (20)$$

Формула (19) при $K \le 1$ подтверждает вывод **4** из § 6.06 о монотонном возрастании $\sigma$ вместе с возмущением: $d\sigma/dK > 0$. Сравнение оценки (19) с данными численного эксперимента [Ch79, p.345] проведено в таблице.

| $K$ | $\sigma$ по формуле (29) | $\sigma$ из числ. экспер. | $\delta$, % |
|---|---|---|---|
| 0.2 | $2.06 \cdot 10^{-2}$ | $2.00 \cdot 10^{-2}$ | 3 |
| 0.5 | $6.15 \cdot 10^{-2}$ | $6.86 \cdot 10^{-2}$ | 16 |
| 1 | 0.145 | 0.132 | 10 |

## *§ 8.04 Сечение и отображение Пуанкаре*

◆ Рассмотрим автономные гамильтоновы системы с двумя степенями свободы $\mathcal{H}_2$ с гамильтонианом $H(p_1, p_2, q_1, q_2)$. В силу сохранения энергии фазовая траектория лежит на *энергетической поверхности* (energy surface) - трехмерной области четырехмерного фазового пространства, заданной уравнением $H(\vec{p}, \vec{q}) = E$. Поэтому движение может быть описано как фазовый поток в **трехмерном** пространстве.

✧ Пример 1. Для $H = \vec{p}^2/2m + U(x,y)$ величина импульса, $p(x,y) = \sqrt{2m[E - U(x,y)]}$, при данном $E$ определяется координатами $(x,y)$. Введем переменную $\varphi$ соотношениями

$$p_x = p\cos\varphi, \quad p_y = p\sin\varphi. \qquad (21)$$

Уравнения движения для переменных $x, y, \varphi$ суть

$$\dot{x} = \frac{p}{m}\cos\varphi, \quad \dot{y} = \frac{p}{m}\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial U}{\partial y}\cos\varphi\right). \qquad (22)$$

Энергетическая поверхность в пространстве $\{x, y, \varphi\}$ заполняет **прямой цилиндр** высоты $2\pi$, граница которого в плоскости $OXY$ задана уравнением *эквипотенциальной линии* $U(x,y) = E$.

✧ Доказать, что система (22) является консервативной.

◆ Для упрощения описания $\mathcal{H}_2$ рассмотрим представление фазовых точек на *сечении Пуанкаре* (Poincare section) $S_P$ - двумерной поверхности, которую траектория пересекает неограниченное число раз. Обычно выбирают в качестве $S_P$ плоскость $q_1 = 0$, а положение точки определяют координатами $\{p_2, q_2\}$. Значение $p_1$ определяется из уравнения $H = E$. Пусть фазовая траектория пересекает $S_P$, имея заданный знак $\dot{q}_1$ последовательно в моменты $t_1$ и $t_2$. Оператор эволюции $\hat{S}(t_1,t_2)$ определяет отображение $\hat{T}_P$ поверхности $S_P$ на себя, которое называется *отображением Пуанкаре*.

📖 [1, с.25 • 2, с.31-33, • 4, с.33 • 5, с.23 • 6, с.34 • 7, с.97 • 8, с.34 • 9, с.76 • 10, с.20].

◆ Инвариантные множества отображения $\hat{T}_P$ наглядно представляют информацию о характере движения исходной системы. Если существует независимый от $H$ интеграл движения $F(p_1,p_2,q_1,q_2)$, то инвариантные множества - линии пересечения поверхностей $H=E$, $F=F_0$ и $q_1=0$ - одномерны. В общем случае инвариантные множества могут быть и двумерны, как сечения трехмерной стохастической компоненты. Периодическому движению соответствуют нульмерные инвариантные множества - точки (или системы точек - циклы).

✧ В теории автономных консервативных систем с двумя степенями свободы величину хаотической компоненты характеризуют мерой $\mu_s$ - долей **площади** сечения Пуанкаре, занятой стохастической компонентой, а не долей $\mu$ соответствующего ей **объема** энергетической поверхности ($\mu$ невозможно увидеть и трудно рассчитать). Очевидно, что $\mu_s$ и $\mu$ одновременно стремятся к нулю или к единице.

## *§ 8.05 Модели умеренных колебаний.*

◆ Часто возникает задача о движении точки $m$ в потенциале $U(x,y)$, имеющем минимум, $U(x_m,y_m)=\min U(x,y)=U_m$. Принято выбирать $\{x_m,y_m\}$ за начало координат $OXY$, а величину $U_m$ - за начало отсчета потенциальной энергии. Простейшая модель движения вблизи минимума потенциала - модель *малых колебаний* [ЛЛI, гл.V], которая описывается гамильтонианом

$$H_2=\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{m\omega_1^2}{2}x^2\right)+\left(\frac{p_y^2}{2m}+\frac{m\omega_2^2}{2}y^2\right). \qquad (23)$$

Система $H_2$ называется *линейным осциллятором* (с двумя степенями свободы).

◆ *Нелинейным осциллятором* (с двумя степенями свободы) называется система с гамильтонианом $H(\vec{p},\vec{q})$, который для описания движения при $E\to 0$ может быть приближен выражением $H_2$, но не совпадает с ним тождественно. Гамильтониан $H_2$ учитывает квадратичные члены разложения $U(x,y)$ в двойной ряд Тейлора. Кубичную часть разложения $V_3(x,y)$ можно представить в виде

$$V_3(x,y)=\sum_{k=0}^{3}a_k x^k y^{3-k} \qquad (24)$$

Коэффициенты разложения имеют размерность $\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$. Модель с гамильтонианом $H_3=H_2+V_3$ называется осциллятором с кубичной нелинейностью - *кубичным осциллятором* (cubic oscillator). $H_3$ содержит 7 параметров $(m,\omega_1,\omega_2,a_0,\ldots a_3)$: три фиксируют выбором единиц. Принят выбор: $m=1$,

$\omega_1 = 1$, $a_2 = 1$. Остальные 4 параметра - безразмерные; $H_3$ - четырехпараметрическое семейство.

◆ В семействе $H_3$ наиболее подробно исследована *модель Хенона - Хейлеса* (HH), упоминавшаяся в § 2.03:

$$H_3 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}\left(p_y^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3. \qquad (25)$$

⇰ [HH64] - Henon M., Heiles C. - Astron. J., 1964, 69, 1, 73-9.

В этой модели движение финитно при значениях энергии $E < E_D = 1/6$. Потенциал обладает симметрией $C_{3v}$. Найденные в [HH64] проекции фазовых траекторий на сечение Пуанкаре часто воспроизводятся в книгах.

📖 [1, c.97 • 2, c.67, • 5, c.171 • 7, c.98].

◆ Если по соображениям симметрии $V_3 \equiv 0$, то следующими существенными членами разложения потенциала будут квартичные:

$$V_4(x, y) = \sum_{k=0}^{3} b_k x^k y^{4-k}. \qquad (26)$$

Коэффициенты разложения $b_k$ имеют размерность $ML^{-2}T^{-2}$. Модель с гамильтонианом $H_4 = H_2 + V_4$ называется осциллятором с квартичной нелинейностью - *квартичным осциллятором* (quartic oscillator). Принято фиксировать параметры $H_4$ выбором $m = 1$, $\omega_1 = 1$, $b_2 = 1/2$: $H_4$ - пятипараметрическое семейство.

◆ В семействе $H_4$ наиболее подробно исследована *модель Паллена - Эдмондса* (PE):

$$H_4 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}\left(p_y^2 + y^2\right) + \frac{1}{2} x^2 y^2. \qquad (27)$$

⇰ [PE81] - Pullen R.A., Edmonds A.R. - J. Phys. A, 1981, 14, 12, L477-84.

В этой модели движение финитно при любых значениях энергии $E$. Потенциал обладает симметрией $C_{4v}$. Модели $H_3$ и $H_4$ образуют класс моделей умеренных колебаний. Они имеют универсальное значение при $E << 1$, когда члены $V_n$ с $n \geq 5$ можно отбросить.

◆ Модель Паллена - Эдмондса (27) мы выберем в качестве представителя класса нелинейных осцилляторов. Именно ее целесообразно выбрать для детального исследования по двум причинам. Во-первых, в модели PE изучение свойств слабой стохастичности значительно проще, чем, например, в модели Хенона - Хейлеса (HH). Во-вторых, финитность движения при любой энергии в модели PE позволяет исследовать зависимость характеристик стохастического движения от энергии в **широкой области** сплошной стохастичности. В модели (HH) такая область сводится к малой окрестности порога диссоциации $E_D$.

EOL

☯