

# ЛЕКЦИЯ #07

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИОНИЗАЦИЯ

### ВОЗМУЩЕННЫЙ МАЯТНИК

#### § 7.01 Стохастическая ионизация

◆ [Развитие выводов **7** и **8**] В качестве примера применения критерия Чирикова к модели, допускающей сравнение с экспериментом, рассмотрим классическую динамику атома водорода в переменном однородном электрическом поле.

📖 [4, с.347]

◆ Для упрощения ограничимся одномерной моделью с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{x} + e\xi x \cos \omega t \quad (1)$$

Такая модель может быть использована для описания системы, в которой электрон совершает движение по орбите, сильно вытянутой в направлении поля.

◆ Следуя традиции, будем использовать атомную систему единиц ( $e, m, \hbar = 1$ ). При этом переменная действия  $I$  (см. [ЛЛ, §50]) будет равна главному квантовому числу  $n$ . В классической модели  $n$  изменяется непрерывно, что оправдано при  $n \gg 1$ . Используя известное разложение закона движения модели Кеплера в ряд Фурье [ЛЛII, §70], запишем гамильтониан (1) в переменных действие - угол:

$$H(I, \theta; t) = -\frac{1}{2n^2} + \xi n^2 \cos \omega t \left( \frac{3}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos k\theta \right), \quad (2)$$

где коэффициенты  $x_k$  даются выражениями

$$x_k = \frac{1}{k} J'_k(k) = \frac{1}{k} [J_k(k) - J_{k+1}(k)], \quad (3)$$

а  $J_n(z)$  есть функция Бесселя первого рода. Значения первых коэффициентов таковы:  $x_1 = 0.325$ ,  $x_2 = 0.112$ ,  $x_3 = 0.059$ . При больших  $k$   $x_k \approx 0.4k^{-5/3}$ .

◆ Частота невозмущенного движения системы

$$\Omega(n) = \frac{\partial H_0}{\partial n} = \frac{1}{n^3}. \quad (4)$$

Резонансное условие  $k\Omega_k = k\Omega(n_k) = \omega$  определяет значение действия  $n_k$  в  $k$ -м резонансе при пренебрежимо малом возмущении:

$$n_k = \left( \frac{k}{\omega} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

◆ Рассмотрим движение системы в  $k$ -м резонансе. Будем считать, что отклонение действия от резонансного значения  $J = n - n_k$  мало ( $J \ll n_k$ ), а разность фаз  $\varphi = \theta - \Omega_k t$  - медленно меняющаяся функция:

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta} - \Omega_k = \frac{\partial H_0}{\partial n} - \frac{1}{n_k^3} = \frac{1}{(n_k + J)^3} - \frac{1}{n_k^3} \approx -\frac{3J}{n_k^4}. \quad (6)$$

Уравнение для отклонения от резонанса по действию имеет вид:

$$\dot{J} = 2\mathcal{E} n_k^2 \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} m x_m \sin m \theta. \quad (7)$$

Сохраняя в правой части одно только медленно меняющееся слагаемое,

$$\dot{J} \approx -\mathcal{E} n_k^2 k x_k \sin(k\theta - \omega t), \quad (8)$$

и учитывая, что

$$\theta = \frac{\omega}{k} t + \varphi \quad (9)$$

получаем уравнение для отклонения по действию в форме

$$\dot{J} = \mathcal{E} n_k^2 k x_k \sin k\varphi. \quad (10)$$

Уравнения (7) и (11) суть канонические для резонансного гамильтониана

$$H_r(J, \varphi) = -\frac{3J^2}{2n_k^4} - \mathcal{E} n_k^2 x_k \cos k\varphi, \quad (11)$$

с точностью до обозначений совпадающего с гамильтонианом маятника. Отсюда находится полуширина резонанса по действию:

$$\frac{1}{2} \delta I_k = n_k^3 \sqrt{\frac{4}{3} \mathcal{E} x_k}. \quad (12)$$

Условие перекрытия резонансов (§ 5.02) имеет вид

$$\frac{1}{2} (\delta I_k + \delta I_{k+1}) = \Delta I = n_{k+1} - n_k \quad (13)$$

◆ Подстановка в (13) выражений (5) и (12) приводит к пороговому для перекрытия резонансов значению амплитуды напряженности электрического поля:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{\gamma_k} n_k^{-4}, \quad (14)$$

где

$$\gamma_k = \frac{4}{3} \left[ |x_k|^{1/2} + |x_{k+1}|^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-1/3} \right]^2 \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{1/3} - 1 \right]^{-2}. \quad (15)$$

Значения параметров  $\gamma_k$  увеличиваются с ростом  $k$ :  $\gamma_1 = 13.8$ ,  $\gamma_2 = 19.0$ ; при  $k \gg 1$   $\gamma_k \approx 19k^{1/3}$ . Поэтому если условие перекрытия выполнено для  $k$ -го и  $k+1$ -го резонансов, то оно выполнено и для всех более высоких резонансов.

◆ Среднее значение напряженности статического электрического поля, действующего на электрон в состоянии с величиной действия  $n_k$ , есть

$$\bar{\mathcal{E}}_a = 2n_k^{-4}. \quad (16)$$

Таким образом, при амплитуде переменного поля, **в десятки раз** меньшей средней напряженности статического поля, в рассматриваемой системе возникает перекрытие резонансов, открывающее путь диффузионному росту действия (и, соответственно, энергии) электрона. Этот процесс приводит к удалению электрона на неограниченно большое расстояние от ядра - *стохастической (диффузионной) ионизации* атома.

◆ В экспериментах Бэйфилда и Коха [BK74] при воздействии на атомы водорода в состоянии с  $n_0 = 66 \pm 3$  электромагнитного поля с частотой  $\omega = 6.2 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  была обнаружена ионизация, имевшая пороговый по амплитуде поля характер с порогом  $\mathcal{E}'_c \approx 10 \text{ В см}^{-1}$ . Оценка (14) дает при  $k=1$  значение  $\mathcal{E}'_c \approx 14 \text{ В см}^{-1}$ .

∞ [BK74] - Bayfield J., Koch P. - Phys. Rev. Lett., 1974, 33, 5, 258-61.

✧ Степень количественного согласия надо оценивать осторожно: изложенная теория стохастической ионизации построена в предположении  $\omega > \Omega(n_0)$ , тогда как в эксперименте частота поля была **меньше** частоты движения электрона:  $\omega = 0.43\Omega(n_0)$ .

✧ Компьютерный эксперимент, основанный на (трехмерной) классической модели [LP78], дал результаты в согласии с измерениями [BK74].

∞ [LP78] - Leopold J.G., Percival I.C. - Phys. Rev. Lett., 1978, 41, 14, 944-7.

✧ Модель классической диффузионной ионизации была предложена в работе [ДЗК78] (см. также [ДКШ83]).

∞ [ДЗК78] - Делоне Н.Б., Зон Б.А., Крайнов В.П. - ЖЭТФ, 1978, 75, 445.

∞ [ДКШ83] - Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л. - УФН, 1983, 140, 3, 355-92.

✧ Для классической модели атома водорода найти пороговое значение  $\mathcal{E}'_s$  для ионизации в **ПОСТОЯННОМ** однородном электрическом поле.

✧ Для условий опыта [BK74] рассчитать пороговую частоту **однофотонной** ионизации.

✧ В **КВАНТОВОЙ** теории систем с дискретным спектром, взаимодействующих с переменным гармоническим полем частоты  $\omega$ , основную роль играет параметр

$$\beta = \frac{V_{mn}}{\hbar(\omega_{mn} - \omega)}, \quad (17)$$

где  $V_{mn}$  - матричный элемент возмущения,  $\omega_{mn}$  - частота перехода,  $\hbar$  - постоянная Планка; при  $\beta \ll 1$  применима нестационарная теория возмущений. Для условий опыта [ВК74] вычислить значение  $\beta$  для  $n = 66$  и  $m = 67$  при значении напряженности поля  $\mathcal{E}_c$ .

**Указание.** Для вычисления матричного элемента  $V_{mn}$  вместо расчета по точным формулам удобнее использовать оценку, основанную на принципе соответствия.

✧ Описанная в данном параграфе последовательность преобразований является универсальной при подготовке к использованию критерия Чирикова. Резюмируем ее основные ступени (см. также лекцию **VIB11**).

- ① Определяется переменная действия  $I$  для невозмущенной системы  $H_0(p, q)$ .
- ② Невозмущенный гамильтониан преобразовывается к виду  $H_0(I)$ . (см. (2))
- ③ С помощью условия  $k\Omega(I_k) = \omega$  отыскиваются центры резонансов по действию  $I_k$ . (см. уравнение (5))
- ④ Оператор возмущения преобразовывается к виду фурье-разложения по угловой невозмущенной переменной,  $V(p, q) \cos \omega t \rightarrow \cos \omega t \sum V_k(I) \cos k\theta$ . (см. (2))
- ⑤ В окрестности  $k$ -го резонанса в разложении сохраняется одно резонансное слагаемое. (см. переход от (7) к (8)).
- ⑥ Вводятся малое отклонение по действию  $J = I - I_k$  и медленная фаза  $\phi = \theta - \Omega_k t$ . Строятся канонические уравнения для них (см. (6) и (10)).
- ⑦ В окрестности  $k$ -го резонанса строится эффективный гамильтониан маятника (см. (11))
- ⑧ Из гамильтониана маятника находятся полуширины резонансов по действию  $\frac{1}{2} \delta I_k$  (см. уравнение (12)).
- ⑨ К результатам пп. (③) и (⑧) применяется критерий Чирикова.

## § 7.02 Возмущенный маятник

◆ С целью исследования свойств хаотической компоненты при **малом** возмущении [развитие и проверка выводов **1 - 6** при малых  $V$ ] рассмотрим неавтономную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \cos \theta + V \cos \theta \cos \omega t, \quad (18)$$

которая называется *возмущенным маятником* (*perturbed pendulum*). Гамильтониан (18) определяет двухпараметрическое семейство моделей, в котором  $V$  задает величину возмущения, а  $\omega$  - отношение частоты возмущений к частоте малых колебаний.

◆ Стандартное отображение может быть построено как стробоскопическое отображение Пуанкаре для модели РПТ (L03). Сохраним в гамильтониане РПТ **две** низшие фурье - гармоники:

$$H = \frac{I^2}{2} + K \cos \theta + 2K \cos \theta \cos 2\pi t. \quad (19)$$

Заменой переменных  $I = p\sqrt{K}$ ,  $\tau = t\sqrt{K}$ ,  $\theta = \theta + \pi$  выражение (19) сводится к гамильтониану (18) возмущенного маятника

$$\frac{1}{K}H = \frac{I^2}{2} - \cos\theta - 2\cos\theta \cos\frac{2\pi}{\sqrt{K}}\tau \quad (20)$$

с параметрами  $V = -2$  и  $\omega = 2\pi/\sqrt{K}$ .

◆ Нашей основной задачей в теории возмущенного маятника будет исследование стохастического слоя вблизи сепаратрисы (невозмущенного маятника) при **умеренном** ( $V \sim 1$ ) **высокочастотном** ( $\omega = 2\pi/\sqrt{K} \gg 1$ ) возмущении. Для ее решения можно использовать подход, основанный на критерии перекрытия резонансов и использующий теорию движения невозмущенного маятника.

📖 [1, с.13 • 2, с.39 • 4-с.16-20 • 10-с.14-16].

Мы будем использовать альтернативный (но эквивалентный) подход, основанный на вторичной редукции уравнений движения, совершив переход от отображения Пуанкаре с **минимальным** масштабом времени последования  $T_- \sim \omega^{-1} \ll 1$  к отображению с **максимальным** масштабом  $T_+ \sim \omega \gg 1$ , равным характерному времени прохождения системой одной ветви сепаратрисы.

### § 7.03 Сепаратрисное отображение

◆ Рассмотрим движение возмущенного маятника

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos\theta + V \cos\theta \cos\omega t \quad (21)$$

с энергией, близкой к сепаратрисному значению  $E \approx 1$  в условиях, когда возмущение можно считать малым ( $V \ll 1$  или  $\omega \gg 1$ ). Обозначение:  $w = E - 1$  - отклонение энергии от сепаратрисного значения;  $|w| \ll 1$ .

◆ Вычислим приращение  $\Delta w$  на интервале времени между двумя последовательными прохождениями фазовой точки вблизи седла. Мощность обобщенной силы

$$P = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta} = V \dot{\theta} \sin\theta \cos\omega t. \quad (22)$$

Приращение энергии за данный интервал времени  $(t_1, t_2)$  определяется интегралом

$$\Delta w = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} V \dot{\theta} \sin\theta \cos\omega t dt. \quad (23)$$

Интеграл, определяющий приращение энергии системы, движущейся вблизи сепаратрисы, называется *интегралом Мельникова - Арнольда*. Скорость маятника  $\dot{\theta}$  велика только в моменты прохождения вблизи точки равновесия  $\theta = 0$ .

Именно эта область даст основной вклад в величину  $\Delta w$ . Поскольку при  $|w| \ll 1$  движение вблизи точки  $\theta = 0$  мало отличается от движения на сепаратрисе, можно оценить  $\Delta w$ , подставив в интеграл в качестве  $\theta(t)$  закон движения на сепаратрисе

$$\theta(t) = 4 \operatorname{arctg}(e^t) - \pi \quad (24)$$

и распространив интегрирование на всю ось времени. Поскольку решение (24) соответствует начальным условиям  $\theta(0) = 0$ , фиксирующим начало отсчета времени, зависимость от времени возмущения следует взять в виде  $\cos(\omega t + \psi)$ , где  $\psi$  - начальная фаза возмущения. После подстановки

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2}{\operatorname{ch} t}, \quad \sin \theta = 2 \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \quad (25)$$

интеграл (3) вычисляется элементарно:

$$\Delta w = 4V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^3 t} \cos(\omega t + \psi) dt = -2\pi\omega^2 \left( \operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{2} \right)^{-1} V \sin \psi \quad (26)$$

Изменение энергии маятника на интервале времени между двумя последовательными прохождениями фазовой точки вблизи седла под действием высокочастотного возмущения экспоненциально мало:

$$\Delta w \approx -V \sin \psi 4\pi\omega^2 \exp(-\pi\omega/2). \quad (27)$$

Поэтому можно считать, что такое новое значение отклонения энергии от сепаратрисного значения

$$w' = w + L \sin \psi \quad (28)$$

где

$$L(\omega, V) = -2\pi\omega^2 \left( \operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{2} \right)^{-1} V \quad (29)$$

останется малым:  $|w'| \ll 1$ .

◆ Вычислим приращение  $\Delta\psi$  фазы возмущения за интервал времени между двумя последовательными прохождениями маятника через точку равновесия  $\theta = 0$ . Величина этого интервала  $\tilde{T}$  в основном определяется условиями движения фазовой точки вблизи седла. Поскольку скорость движения  $\dot{\theta}$ , а вместе с ней и мощность возмущения  $P$  (2) в этой области пренебрежимо малы, то  $\tilde{T}$  можно оценить как соответствующий интервал времени в модели невозмущенного маятника с заданной величиной  $w$ . Он равен периоду вращения маятника при  $w > 0$  или половине периода колебаний маятника при  $w < 0$ . При  $|w| \ll 1$  обе величины имеют одинаковую асимптотику

$$\tilde{T}(w) = \ln \frac{32}{|w|}. \quad (30)$$

Приращение  $\Delta\psi$  фазы возмущения на указанном интервале времени равно отношению  $\tilde{T}(w')$  (с **новым** значением отклонения по энергии!) к частоте возмущения  $\omega$ :

$$\Delta\psi = \frac{1}{\omega} \ln \frac{32}{|w'|}. \quad (31)$$

◆ Динамическая система - отображение цилиндра на себя с динамическими переменными  $w, \psi$  и параметрами  $L, \omega$ , заданная уравнениями движения

$$w' = w + L \sin \psi, \quad \psi' = \psi + \omega \ln \frac{32}{|w'|}, \quad (32)$$

называется *сепаратрисным отображением* (**whisker mapping**).

✧ Сепаратрисное отображение **не является** отображением Пуанкаре: входящие в него величины  $\psi$  и  $w$  определяются в **разные** моменты времени -  $\psi$  при  $\max|\dot{\theta}|$ ,  $w$  при  $\min|\dot{\theta}|$  на периоде. Тем не менее, оно во многом подобно по свойствам отображениям Пуанкаре (в частности, является сохраняющим площадь - проверить!).

📖 [1, с.87-90 • 2, с.241-243,250 • 4, с.130-133 • 10, с.33-39].

Исследование свойств сепаратрисного отображения позволяет определить параметры стохастического движения в стохастическом слое вблизи сепаратрисы невозмущенной системы.

EOL

