ЛЕКЦИЯ #06
СТАНДАРТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 3

§ 6.01 Стандартное отображение: циклы длины 2 - устойчивость

◆ Стандартное отображение имеет два цикла C_2: один из них ($C_2^{(1)}$) образован точками

$$\theta_1 = 0; \qquad \theta_3 = \pi; \qquad I_1 = I_3 = \pi \tag{1}$$

а второй ($C_2^{(2)}$) - точками $\theta_2 = \pi/2 - \phi(K)$, $I_2 = \pi - 2\phi(K)$ и $\theta_4 = 3\pi/2 + \phi(K)$, $I_4 = \pi + 2\phi(K)$, где

$$\phi(K) = \frac{K}{4} - \frac{K^3}{128} + \frac{13K^5}{6144} - \ldots \tag{2}$$

◆ Устойчивость цикла определяется спектром матрицы

$$\hat{B} = \prod_{k=0}^{n-1} \hat{A}\left(\hat{T}^k \vec{c}\right). \tag{3}$$

представляющей произведение матриц устойчивости всех точек цикла.

✧ Доказать, что устойчивость цикла не зависит от того, какую его точку считать начальной.

✧ Может ли цикл быть неустойчив, если **все** его точки устойчивы?

✧ Может ли цикл быть устойчив, если **одна** из его точек неустойчива?

Выше найдены координаты точек циклов C_2 стандартного отображения. Их устойчивость определяется следом матрицы $\hat{B}$,

$$\hat{B} = \hat{A}(\vec{c}_{i+2})\hat{A}(\vec{c}_i), \qquad \hat{A} = \begin{vmatrix} 1 & K\cos\theta \\ 1 & 1 + K\cos\theta \end{vmatrix}. \tag{4}$$

$\mathrm{Sp}\hat{B} = 2 + 2K\left(\cos\theta_i + \cos\theta_{i+2}\right) + K^2\cos\theta_i\cos\theta_{i+2}$. Для $C_2^{(1)}$: $\mathrm{Sp}\hat{B} = 2 - K^2$ - цикл **устойчив** при $K < 2$. Для $C_2^{(2)}$: $\mathrm{Sp}\hat{B} = 2 + 4K\sin\phi + K^2\sin^2\phi > 2$: цикл **неустойчив** при $K > 0$.

§ 6.02 Резонанс с числом вращения $\alpha = 1/2$

◆ При $K < 2$ вблизи точек устойчивого цикла $\vec{c}_1$, $\vec{c}_3$ есть множество точек с числом вращения $\alpha = 1/2$: *полуцелый резонанс* (ПР). Его форму можно найти тем же способом континуализации, который был использован в §4.02 для определения сепаратрисы главного ($\alpha = 0, 1$) резонанса (и не только им: см. [2, с. 259-261]).

◆ Положение точки после двух отображений дается формулами

$$I'' = I + K\sin\theta + K\sin(\theta + I + K\sin\theta), \tag{5}$$

$$\theta'' = \theta + 2I + 2K\sin\theta + K\sin(\theta + I + K\sin\theta), \tag{6}$$

Если $I \approx \pi$ и $K << 1$, то изменения положений точек за два цикла отображения малы. Переходя к непрерывному времени n,

$$I'' = I + \frac{dI}{dn}, \qquad \theta'' = \theta + \frac{d\theta}{dn}, \tag{7}$$

вводя переменную $J = I - \pi \sim K << 1$ и сохраняя в правых частях уравнений (5) и (6) члены первого неисчезающего порядка по K, получаем

$$\frac{dJ}{dn} = -KJ\cos\theta - \frac{K^2}{2}\sin 2\theta, \qquad \frac{d\theta}{dn} = 2J + K\sin\theta. \tag{8}$$

Это - канонические уравнения движения для системы с гамильтонианом

$$H_r(J,\theta) = J^2 + KJ\sin\theta - \frac{K^2}{4}\cos 2\theta. \tag{9}$$

Полагая $E = \varepsilon K^2/4$, из (9) находим уравнения для фазовых траекторий

$$J(\theta) = -\frac{K}{2}\left[\sin\theta \pm \sqrt{1 + \varepsilon - \sin^2\theta}\right]. \tag{10}$$

Уравнение сепаратрисы полуцелого резонанса - линии уровня $H_r = 0$:

$$S_0^{(1/2)}(\theta) = \pi - \frac{K}{2}\sin\theta \pm \frac{K}{2}\cos\theta \tag{11}$$

При малых K резонанс с $\alpha = 1/2$ имеет ширину по действию $\delta I = K$.

✧ Для стандартного отображения оценить ширину по действию резонанса с числом вращения $\alpha = 1/3$ в низшем порядке по K.

◆ Найдем соответствующее перекрытию целого и полуцелого резонансов значение порога глобальной стохастичности K_c. Учитывая деформацию сепаратрис, возьмем для сепаратрисы главного резонанса скелет первого порядка (см. §5.04)

$$S_1(\theta) = \sqrt{4K + K^2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{K}{2}\sin\theta, \tag{12}$$

а для сепаратрисы полуцелого порядка - выражение (11). Тогда из критерия Чирикова получим уравнение

$$\sqrt{4K_c + K_c^2} + \frac{K_c}{2} = \pi, \tag{13}$$

откуда

$$K_c = \frac{2}{3}\left[\sqrt{16 + 8\pi + 4\pi^2} - \pi - 4\right] = 1.225 \tag{14}$$

Это значение имеет относительную ошибку $\delta = 0.26$.

§ 6.03 *Иррациональные числа вращения*

◆ Кроме траекторий, захваченных в резонансы, и стохастических слоев, возникающих при расщеплении сепаратрис резонансов, в фазовом пространстве есть инвариантные кривые, обладающие иррациональными числами вращения. Их анализ требует описания арифметической структуры иррациональных чисел, которая связана со свойствами разложений этих чисел в цепные дроби (см. **VIB**§1.02).

◆ Рассмотрим разложение числа α $(0<\alpha<1)$ в *цепную* (непрерывную) *дробь* (continued fraction)

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} \qquad (15)$$

где a_i - целые числа. Для погрешности n-й подходящей дроби $\overline{\alpha}_n = p_n/q_n$ элементарно доказывается неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}\,. \qquad (16)$$

Дробь $\overline{\alpha}_n$ является наилучшим приближением для иррационального числа α среди всех дробей с равными или меньшими знаменателями.

◆ Теорема (J. Liouville, 1851). Если α есть корень полинома степени N с целыми коэффициентами, то существует константа $0<\delta<1$ такая, что для всех целых p и q имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\delta}{q^N}. \qquad (17)$$

Из теоремы следует, что хуже всего аппроксимируются рациональными числами *квадратичные иррациональности* - корни уравнений

$$c_2\alpha^2 + c_1\alpha + c_0 = 0 \qquad (18)$$

с целыми коэффициентами c_i. Для них константа δ дается формулой

$$\delta = \frac{2}{3}\left(c_1^2 - 4c_0c_2\right)^{-1/2}. \qquad (19)$$

✧ Доказать, что при целых c_i минимальным иррациональным значением выражения $\left(c_1^2 - 4c_0c_2\right)^{1/2}$ является $\sqrt{5}$.

§ 6.04 Теорема Колмогорова - Арнольда - Мозера (КАМ)

◆ Эта теорема утверждает существование нерезонансных торов (орбит квазипериодического движения - в нашем примере стандартного отображения одномерными торами являются инвариантные кривые с иррациональными числами вращения) в слабо возмущенной системе. Приведем ее формулировку, принадлежащую И.В. Арнольду [А89, с.372]

> Теорема. Если невозмущенная гамильтонова система не вырождена, то при достаточно малом консервативном гамильтоновом возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически, с числом частот, равным числу степеней свободы.
>
> Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением.

[А89] - Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. - М.: Наука, 1989. - 472 с.

✧ Теорема имеет варианты, охватывающие как случай неавтономных гамильтоновых систем с периодическим возмущением, так и случай отображений, сохраняющих площадь [А89, с.376].

◆ Для отображений невырожденность означает зависимость числа вращения невозмущенного тора от действия I. Для стандартного отображения это так. Величина возмущения в КАМ-теории пропорциональна управляющему параметру ε. В нашем примере эту роль играет параметр K.

◆ Нерезонансными являются те инвариантные кривые (торы), для которых число вращения α удовлетворяет соотношению

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta q^{-5/2}, \tag{20}$$

где δ - величина, не зависящая от q и малая вместе с ε. Мера части интервала чисел вращения $0 < \alpha < 1$, занятой числами, не удовлетворяющими условию (20), конечна, $\mu_\alpha < \delta \sum q^{-3/2} = \mathrm{const} \cdot \delta$, и мала вместе с δ (и, соответственно, с $\varepsilon = K$).

📖 [1, с.22; • 2, с.185 • 3, с.21 • 4, с.77; • 5, с.164; • 7, с.101• 10, с.26]

§ 6.05 Разрушение золотого тора.

◆ По современным представлениям, переход ко глобальной стохастичности связан с разрушением всех нерезонансных торов.

✧ Теорема КАМ **не утверждает**, что при достаточно большом возмущении все нерезонансные торы будут разрушены.

◆ Теорема Лиувилля (§6.04) позволяет указать число вращения g, наиболее далекое от рациональных, и выделить наиболее устойчивый тор. Из формулы (17) следует, что N должно быть взято минимальным и равным двум: число g должно быть квадратичной иррациональностью. Из формулы (17) следует также, что δ должно быть взято максимальным. Наконец, знаменатели q_n подходящих дробей $\bar{\mathrm{g}}_n$ должны быть минимальными. Этим условиям удовлетворяет *золотое число* g (golden number), называемое также *золотым средним* (golden mean) или золотым сечением:

$$\mathrm{g} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\ldots, \tag{21}$$

удовлетворяющее уравнению

$$\mathrm{g}^2 + \mathrm{g} - 1 = 0. \tag{22}$$

В разложении g в цепную дробь все коэффициенты равны единице: $\mathrm{g} = [1,1,1,1\ldots]$. Рекуррентные соотношения для p_n и q_n в этом случае совпадают с уравнениями движения модели Фибоначчи (см. § 1.04, пункт ❹). Соответственно, n-я подходящая дробь для g дается отношением двух последовательных чисел Фибоначчи,

$$\bar{\mathrm{g}}_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}. \tag{23}$$

Гипотеза о максимальной устойчивости *золотого тора* с числом вращения g была высказана Грином в 1979 г. [G79].

[G79] - Greene J. - J. Math. Phys., 1979, <u>20</u>, 1183.

✧ Из-за инвариантности стандартного отображения при преобразовании $I \to 2\pi - I$, $\theta = 2\pi - \theta$ теми же свойствами обладает тор с числом вращения $\alpha = 1 - \mathrm{g} = [2,1,1,1\ldots] = 0.38196\ldots$.

◆ Критическое значение K_c, при котором золотой тор теряет устойчивость, можно найти, рассматривая границы устойчивости $K_c(n)$ аппроксимирующих его циклов с числами вращения $\alpha = \bar{\mathrm{g}}_n$. Шмидт и Бялек [SchB82] рассчитали условия устойчивости таких циклов до $n = 12$ и обнаружили, что отношения разностей последовательных пороговых значений,

$$R_n = \frac{K_c(n) - K_c(n+1)}{K_c(n-1) - K_c(n)}, \tag{24}$$

с ростом n стремятся к постоянному значению $R \approx 0.61$. Экстраполируя найденные значения $K_c(n)$ к $n \to \infty$ по формуле

$$K_c(n) = K_c + AR^n, \tag{25}$$

они получили значение

$$K_c = 0.9716, \tag{26}$$

хорошо согласующееся с результатами численных экспериментов.

[SchB82] - Schmidt G., Bialek J. Physica D, 1982, 5, 397.

[2, с.195,269,278; • 4, с.154(?) • 5, с.164 • 10, с.53]

§ 6.06 Предварительные выводы

◆ Стандартное отображение есть стробоскопическое отображение (§ 3.03) для неавтономной гамильтоновой системы $H_T(p,q,t)$ с одной степенью свободы и периодическим возмущением, $H_T(I,\theta,t) = H_0(I,\theta) + V(\theta,t)$,

$$H_0(I,\theta) = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta, \qquad V(\theta,t) = K\cos\theta\left(-1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)\right). \tag{27}$$

Возмущение выбрано так, что $\overline{V}(\theta,t) = 0$. Параметр K далее считаем "силой возмущения" и обозначаем V.

◆ Считая рассмотренную систему достаточно общей, можно сделать следующие предварительные выводы.

1. $V \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\chi$

В гамильтоновой системе $H_T(I,\theta,t)$ с $K = 3$ хаотическое движение существует при любой отличной от нуля величине возмущения $V \neq 0$.

2. $\chi = (W_u + W_s)$

Под действием возмущения сепаратрисы резонансов расщепляются, порождая локализованные в их окрестности стохастические слои - объединения несовпадающих устойчивого и неустойчивого многообразий седловых точек (§ 4.02).

3. $\mu \neq 0; \quad \dfrac{d\mu}{dV} > 0; \quad V \to \infty \Rightarrow \mu \to 1$

Мера хаотической компоненты μ отлична от нуля при любой конечной величине возмущения V. С ростом возмущения мера стохастической компоненты монотонно увеличивается. При неограниченном росте возмущения стохастическая компонента заполняет все фазовое пространство (§ 4.03).

4. $\dfrac{d\sigma}{dV} > 0$

Величина показателя Ляпунова σ монотонно возрастает с увеличением возмущения (см. данные эксперимента в работе [GK85] из § 4.04).

5. $\chi \supset \left(\vec{x} \middle| \sigma(\vec{x}) > 0\right); \quad \mu \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx \left\langle \sigma(\vec{x}) \right\rangle$

Хаотическая компонента всегда включает неустойчивые точки. В области, где хаос является почти сплошным, показатель Ляпунова можно оценить как среднее значение показателя локальной неустойчивости $\sigma(\vec{x})$ по фазовому пространству (см. расчет в § 4.04).

6. $\dfrac{d\gamma}{dV} > 0; \quad \gamma \cong \sigma$

Скорость перемешивания γ, в общем, увеличивается с ростом возмущения. Величина скорости перемешивания близка к показателю Ляпунова (§ 5.01).

7. $\exists V_c\!: \quad V > V_c \quad \Rightarrow \quad I_n \to \infty$

Существует порог глобальной стохастичности - значение V_c величины возмущения, при переходе через которое качественно меняется характер движения: из финитного по действию оно становится инфинитным (§ 5.03, 04).

8. $V > V_c \;\Rightarrow\; \left\langle I^2(t) \right\rangle \propto t$

В области глобальной стохастичности V_c движение переменной действия имеет диффузионный характер: средний квадрат действия растет пропорционально времени (§ 5.04).

◆ С точки зрения эксперимента наиболее примечательны выводы **7** и **8**: они позволяют допустить существование в нелинейных системах перехода к неограниченному поглощению энергии внешнего поля, имеющего пороговый характер по величине поля. Такое поглощение может привести систему к распаду (диссоциации, ионизации), который может быть зарегистрирован.

◆ С точки зрения теории наиболее уязвимы выводы **1, 3, 4** и **6** в области малых $V \equiv K$: фактически нам удалось провести расчеты характеристик стохастического движения только в области $K \geq 1$. При $K << 1$ численные методы мало эффективны: нужны специальные аналитические методы.

EOL

☯