ЛЕКЦИЯ # 01
КИНЕМАТИКА: МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

§ 1.01 Нелинейная динамика и теория колебаний

◆ Для предварительного описания задач, целей и методов нелинейной динамики удобно начать с ее сравнения с теорией. колебаний. В обеих теориях центральное место занимает исследование законов движения динамических переменных $x_i = x_i(t)$, определенных уравнениями движения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i\left(\{x_i\},\{a_j\}\right), \quad (1 \le i \le K) \quad . \tag{1}$$

где $\{a_j\}$, $(1 \le j \le L)$ - параметры. В векторных обозначениях система (1) записывается так: $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x},\vec{a})$.

Для подсчета размерности фазового пространства $\dot{x}_{K+1} = 1K$ удобно считать правые части уравнений (1) не зависящими от времени: этого всегда можно добиться введением совпадающей численно со временем динамической переменной с уравнением движения $\dot{x}_{K+1} = 1$.

В теории колебаний для систем с $K = 2$ рассматриваются в основном установившиеся периодические движения. Для систем с $K = 3$ рассматриваются как периодические, так и двухчастотные квазипериодические движения - допускающие представление каждой из динамических величин (кроме введенной выше x_K) в виде двойного ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{m,n}^{\infty} A_{m,n} \exp i\left(m\Omega_1 + n\Omega_2\right)t \tag{2}$$

где m,n - целые числа, Ω_1 и Ω_2 - частоты движения, а амплитуды $A_{m,n}$ удовлетворяют соотношениям $A_{m,n} = A^*_{-m,-n}$.

В теории колебаний квазипериодическое двухчастотное движение рассматривается, в основном, для неавтономных моделей, описывающих систему с двумя динамическими переменными и периодической зависимостью параметров от времени.

Пример 1. В задаче о движении консервативного осциллятора Дуффинга под действием гармонической внешней силы

$$\ddot{x} + x + x^3 = F\cos\omega t \tag{3}$$

движение системы в случае $F << 1$ при начальных условиях общего вида описывается как квазипериодическое двухчастотное (VIB § 10.02). При этом одна из частот равна частоте внешней силы, $\Omega_1 = \omega$, а вторая, Ω_2, зависит от начальных условий.

Пример 2. В задаче о движении осциллятора Ван дер Поля под действием внешней гармонической силы

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x}\left(1 - x^2\right) + x = F\cos\omega t \tag{4}$$

в случае $\alpha, F << 1$ движение является квазипериодическим двухчастотным с частотами $\Omega_1 = \omega$, $\Omega_2 \approx 1$ при большой расстройке $|\omega - 1| >> F$ (VIB §11.03) и периодическим с частотой ω (VIB §11.02) при малой расстройке $|\omega - 1| << F$ (VIB §11.02).

Хотя модели автономных систем с $K = 3$ редко рассматриваются в теории колебаний, из доказанной Андроновым и Виттом теоремы вытекает, что если все динамические переменные в таких системах совершают квазипериодическое движение - то оно имеет не более чем две частоты.

◆ В становлении нелинейной динамики определяющую роль сыграли следующие две работы.

🗁 ✍ [L63] - E.N. Lorenz. "Deterministic Nonperiodic Flow." J. Atmos. Sci., 1963, 20, 130.

В ней качественно исследована и численно решена задача об эволюции диссипативной автономной динамической системы с $K = 3$ с уравнениями движения

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ, \end{aligned} \tag{5}$$

при значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $0 < r < 28$.

🗁 ✍ [HH64] M. Henon and C. Heiles "The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments." Astron. J., 1964, 69, 1, 73.

В ней качественно исследована и численно решена задача об эволюции **консервативной** автономной системы с уравнениями движения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x + 2xy \quad &= 0, \\ \ddot{y} + y + x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Эти уравнения могут быть интерпретированы как уравнения движения частицы единичной массы в силовом поле с потенциалом

$$U(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3. \tag{7}$$

Поскольку для такой системы сохраняется величина полной энергии

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3, \tag{8}$$

то одна из динамических переменных может быть выражена как функция трех других, и движение может быть описано как происходящее в фазовом пространстве с $K = 3$. Уравнения (6) решались при значениях энергии системы $0 < E < 1/6$.

☝ В названных выше работах было установлено, что в динамических системах (разных типов) с $K = 3$ возможно **не квазипериодическое** финитное движение. Оно является экспоненциально неустойчивым.

§ 1.02 Хаотическое движение

> Финитное экспоненциально неустойчивое движение нелинейной динамической системы называется *хаотическим движением* (chaotic motion), или *хаосом* (chaos).

Нехаотическое движение называется *регулярным*.

✧ Терминология: в 60-е - 80-е гг. для гамильтоновых систем как синоним хаоса использовался преимущественно термин "стохастичность" (stochasticity). Современная тенденция - всегда использовать термин "хаос".

◆ Предварительное определение: движение динамической системы называется *экспоненциально неустойчивым* (по Ляпунову), если расстояние $\Delta(t)$ между близкими в начальный момент фазовыми точками растет со временем по экспоненциальному закону:

$$\Delta(t) \sim \Delta(0) e^{\sigma t} \tag{9}$$

Величина σ, характеризующая скорость экспоненциального расхождения близких траекторий в фазовом пространстве, называется *показателем Ляпунова*.

✧ Показать, что для гамильтоновой системы с одной степенью свободы (например, модели точки в потенциальном поле, $H = p^2/2 + U(x)$) при финитном движении малое отклонение $\Delta(t)$ в общем случае растет по линейному закону, $\Delta(t) \approx \Delta(0)(1 + \alpha t)$.

Более строгое определение показателя Ляпунова уточняет три момента предварительного определения, а именно:

- начальное расстояние между фазовыми точками должно быть предельно малым, $\Delta(0) \to 0$;

- показатель Ляпунова определяется средней скоростью экспоненциального роста на предельно большом интервале времени, $t \to \infty$;

- при некоторых (имеющих меру нуль) направлениях вектора начального смещения между фазовыми точками $\vec{\Delta}(0) = \vec{x}(0) - \vec{x}'(0)$ показатель скорости роста оказывается меньше σ. Поэтому σ определяется верхней границей скорости роста. Итак,

$$\sigma = \overline{\lim_{\substack{t\to\infty \\ \Delta(0)\to 0}}} \frac{1}{t} \ln\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \qquad (10)$$

Обобщение этого определения будет дано позже (~L10).

✧ Как изменится показатель Ляпунова, если провести замену переменных в уравнениях движения?

✧ Экспоненциально неустойчивое движение возможно и в линейных системах. Пример 1: "гиперболический акселератор" - система с уравнением движения

$$\ddot{x} - \kappa^2 x = 0,$$

описывающая одномерное движение частицы массы m в поле с потенциалом $U(x) = -m\kappa^2 x^2/2$. Пример 2: параметрически модулированный линейный осциллятор (VIB12) - система с уравнением движения

$$\ddot{x} + [1 + \varepsilon\cos\omega t]x = 0$$

в области параметрического резонанса (например, при $\tau \approx 36\sigma^{-1} |\omega - 2| < \varepsilon/2$). Однако экспоненциально неустойчивое движение линейных систем обязательно инфинитно.

§ 1.03 Кинематика хаотического движения

◆ Закон хаотического движения не может быть задан аналитически конечной формулой.

✧ Закон финитного движения с ограниченной скоростью $x(t, x_0)$ (где x_0 - одно из начальных условий) удовлетворяет неравенствам

$$|x(t, x_0)| < M, \qquad |\dot{x}(t, x_0)| < M' \qquad (A)$$

где M и M' - константы. При хаотическом движении частная производная от закона движения по начальному условию должна расти экспоненциально:

$$\frac{\partial x(t, x_0)}{\partial x_0} \sim e^{\sigma t}. \qquad (B)$$

Построить пример функции $x(t, x_0)$, заданной конечной формулой и удовлетворяющей условиям (A) и (B) в некоторой *области* значений x_0.

Определение закона хаотического движения численным интегрированием уравнений движения затруднено экспоненциальным нарастанием погрешностей. Пусть Δ_+ - характерный размер области финитного движения. Тогда при временах, больших "горизонта предсказуемости"

$$\tau \sim \frac{1}{\sigma} \ln\frac{\Delta_+}{\Delta(0)} \qquad (11)$$

полученная численным расчетом информация о состоянии системы фантастична.

✧ В качестве $\Delta(0)$ можно рассматривать погрешность представления числа в компьютере Δ_c. В языке C++ для записи действительных чисел основным является формат double, отводящий под мантиссу 52 двоичных разряда. Здесь $\Delta_c = 2^{-52} \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$, и $\tau \approx 36\sigma^{-1}$.

◆ Основным способ представления закона хаотического движения является его задание ***статистическими характеристиками*** - некоторыми усредненными по времени величинами. Если $z(t)$ - некоторая функция времени, то ее *средним по времени* значением $\bar{z}$ называется предел отношения интеграла от этой величины по интервалу времени длины T к величине T:

$$\bar{z} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} z(t')\,dt'. \qquad (12)$$

В дальнейшем усреднение величины по времени мы будем обозначать чертой над символом величины.

◆ Простейшими примерами статистических характеристик закона движения являются средние значения динамических переменных и простых функций от них. В некоторых случаях для этих величин могут быть получены полезные соотношения, опирающиеся только на финитность движения и не использующие **никаких** сведений о природе системы. Важнейшим источником таких соотношений служит следующая "точка-тире теорема" - если движение $z(t)$ финитно, то среднее значение производной по времени от функции $z(t)$ равно нулю:

$$\bar{\dot{z}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[z(t=T) - z(t=0)\right] = 0. \qquad (13)$$

Одно из ее следствий: среднее значение произведения физической величины на ее производную по времени при финитном движении равно нулю, $\overline{z\dot{z}} = 0$. Другое, часто используемое, следствие: средние значения правых частей уравнений движения автономной системы (1) при финитном движении равны нулю, $\overline{F_i} = 0$.

◆ Более информативной статистической характеристикой движения $z(t)$ служит функция распределения значений (величины z) $W(z)$. Эту функцию можно ввести следующим образом. Пусть $P(Z)$ - вероятность того, что значение $z(t)$ не превосходит Z:

$$P(Z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \Theta\left(Z - z(t')\right)dt' \qquad (14)$$

где $\Theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда. Тогда функция распределения $W(z)$ задается соотношением

$$W(z) = \frac{dP(z)}{dz}. \qquad (15)$$

◆ Ни средние значения $\bar{z}$, ни функция распределения $W(z)$ не несут информации о **временно́м** характере движения. Статистическими характеристиками, несущими такую информацию, являются корреляционные функции.

Корреляционной функцией (коррелятором) $B_{ik}(\tau)$ (correlation function; correlator) физических величин $x_i(t)$ и $x_k(t)$ называется разность среднего по времени произведения значений этих величин, взятых в моменты времени, различающиеся на заданную величину τ - и произведения средних по времени значений этих величин:

$$B_{ik}(\tau) = \overline{x_i(t+\tau)x_k(t)} - \overline{x_i(t)} \cdot \overline{x_k(t)}. \qquad (16)$$

Величина τ называется *временным сдвигом*. Если $i = k$, то функция $B_{ii}(\tau)$ называется *автокорреляционной функцией* (*автокоррелятором*) величины x_i и обозначается $B_i(\tau)$.

📖 [1, с.28 • 4, с.99 • 5, с.22 • 6, с.57 • 7, с.110 • 9, с.56, 134].

Статистические характеристики могут использоваться для описания движения и в тех случаях, когда движение регулярно и закон движения известен.

✧ Физическая величина $z(t)$ совершает гармоническое колебание $z(t) = A\sin(\Omega t + \psi_0)$. Вычислить для нее функцию распределения значений $W(z)$ и корреляционную функцию $B_z(\tau)$.

§ 1.04 Расширение динамики: отображения

◆ Модели, заданные динамическими дифференциальными уравнениями (1), в которых время непрерывно, в нелинейной динамике называются моделями с потоками, или просто ***потоками*** (flows). Наряду с потоками вводится второй класс моделей - ***отображения*** (maps, mappings). В таких моделях время принимает лишь дискретный набор значений $\{t_n\}$, (n - целое; $t_k < t_l$ при $k < l$). Номер n момента времени t_n принимают за независимую переменную. Уравнения движения систем - отображений выражают значения динамических переменных в момент $n+1$ через их значения в предшествующий момент времени n.

$$\vec{x}(n+1) = \vec{M}(\vec{x}(n), \vec{a}). \qquad (17)$$

◆ Основные источники моделей - отображений таковы.

1. Редукция потоков: вместо любых t за состоянием потока $\vec{x}(t)$ следят в избранные моменты t_n, разделенные интервалами **порядка** характерного времени движения системы, $\theta \sim T$. Примеры: отображение Пуанкаре за период для систем с периодическим воздействием (~L03), отображение последования на сечении Пуанкаре для автономных систем (~L08).
2. Редукция потоков: вместо любых t за состоянием потока $\vec{x}(t)$ следят в избранные моменты t_n, разделенные одинаковыми интервалами**, несколько меньшими** характерного времени движения системы, $\tau \le T$. Значения $\vec{x}(t_0 + n\tau) \equiv \vec{x}_n$ образуют временной ряд (**time series**), который применяется для определения динамики системы по известным законам движения (~L14).
3. Редукция потоков: вместо любых t за состоянием потока $\vec{x}(t)$ следят в избранные моменты t_n, разделенные одинаковыми интервалами**, много меньшими**

характерного времени движения системы, $\tau << T$. Такое построение используется для численного решения дифференциальных уравнений движения (1): потоки заменяются отображениями (17) - дискретными разностными схемами для потоков. Пример: дифференциальное уравнение $\dot{x} = F(x)$ заменяется разностной схемой $x_{n+1} = x_n + h \cdot F(x_n)$, где h - шаг; $h << T$ (метод ломаных Эйлера).

✧ Для дифференциального уравнения движения гармонического осциллятора,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \text{(A)}$$

простейшая разностная схема дается выражением

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -\omega_0^2 h^2 x_n, \qquad \text{(B)}$$

где h - временной шаг. Найти точное решение уравнения (B) и сравнить его с решением (A).

4. Наконец, самостоятельным источником моделей отображений являются системы с дискретным счетом времени. Пример: биология - динамика популяций. Динамическая переменная - численность особей данного вида, n - номер поколения. Начало - задача Фибоначчи (Fibonacci; 1202 г.) о кроликах с уравнением движения $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Фазовая траектория этой модели с начальными условиями $a_1 = 1, a_2 = 1$ называется *числами Фибоначчи* $F_n (\equiv a_n)$

$$F_1 = 1, \; F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \ldots.$$

☯