14 Найти формулы для плотности состояний при D=1, 2, 3 (D — размерность системы) для

1) акустических фононов в длинноволновом пределе ($\omega = sk$, где s — скорость звука);
2) свободных электронов ($\omega = \hbar k^2 / (2m)$, где m — масса электрона).

15 Найти формулу для плотности фононных состояний в одноатомной цепочке (D=1) в приближении взаимодействия с ближайшими соседями (силовая постоянная K, масса атома M). Построить соответствующий график.

16 Найти формулу для плотности фононных состояний в одноатомной цепочке (D=1) с массой атома M и потенциальной энергией взаимодействия:

$$U = \frac{1}{2} \sum_n \left[K_1 (u_n - u_{n+1})^2 + K_2 (u_n - u_{n+2})^2 \right],$$

для случая, когда для силовых констант K_1 и K_2 выполнено условие немонотоности дисперсионной зависимости (см. задачу 9). Построить соответствующий график.

17 Найти формулу для плотности состояний электронов в одномерном кристалле, если закон дисперсии электронных возбуждений имеет вид:

$$\omega(p) = \omega_0 \sin\left[\frac{(pa)^2}{2\pi\hbar^2} \right], \quad |p| \le \pi\hbar/a.$$

Считать, что заданы постоянная решетки a и эффективная масса m_{eff} в центре зоны Бриллюэна (частота ω_0 должна быть выражена через эти параметры). Построить соответствующий график.

плотность состояний

Плотность состояний:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{V} \sum_n \delta(\omega - E_n/\hbar) = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\omega},$$

где n обозначает совокупность квантовых чисел, характеризующих состояние с энергией E_n, $V = L^D$ — объем системы, L и D — соответственно ее линейный размер и размерность (D=1, 2, 3), dN — число квантовых состояний в интервале частот $d\omega$. В $\mathbf{k}$-пространстве на каждое квантовое состояние при-ходится объем $(2\pi/L)^D$. В таблице приведены формулы для расчета плотности состояний при изотропном законе дисперсии $\omega = \omega(|\mathbf{k}|) = \omega(k)$, причем величины k и $dk/d\omega$ должны быть найдены как функции частоты из явного выражения $\omega = \omega(k)$. Заметим, что $dk/d\omega = \upsilon_g^{-1}$, где $\upsilon_g = d\omega/dk$ — групповая скорость.

D	1	2	3
$\rho(\omega) = \frac{1}{V}\frac{dN}{dk}\frac{dk}{d\omega}$	$\frac{\sigma}{\pi}\frac{dk}{d\omega}$	$\frac{\sigma}{2\pi} k \frac{dk}{d\omega}$	$\frac{\sigma}{2\pi^2} k^2 \frac{dk}{d\omega}$
	$\sigma = 1$ для фононов, $\sigma = 2$ для электронов		

эффективная масса

Для произвольного изотропного закона дисперсии $\omega(k)$, имеющего экстремум в точке $k = k_0$, эффективная масса в точке k_0 определяется соотношением:

$$m_{\text{eff}} \equiv \hbar \left(\left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0} \right)^{-1}.$$

При решении задач удобнее находить эффективную массу, разлагая функцию $\omega(k)$ в ряд в точке k_0:

$$\omega = \omega(k_0) + A(k - k_0)^2 + \ldots$$

и выражая m_{eff} через коэффициент A: $m_{\text{eff}} = \dfrac{\hbar}{2A}$.