задачи, часть 3

14 Найти формулы для плотности состояний при $D=1,2,3$ (D- размерность системы) для

1) акустических фононов в длинноволновом пределе ($\omega = sk$, где s - скорость звука);
2) свободных электронов ($\omega = \hbar k^2/(2m)$, m - масса электрона).

15 Найти формулу для плотности состояний $\rho(\omega)$ акустических фононов во всей первой зоне Бриллюэна одноатомной цепочки ($D=1$) в приближении взаимодействия с ближайшими соседями (силовая постоянная K, масса атома M). Построить соответствующий график.

16 Найти формулу для плотности состояний $\rho(\omega)$ электронов во всей первой зоне Бриллюэна ($|p| \le \pi\hbar/a$) одномерного кристалла, если закон дисперсии электронных возбуждений имеет вид:

$$\omega(p) = \omega_0 \sin\left[\frac{(pa)^2}{2\pi\hbar^2}\right].$$

Считать, что заданы постоянная решетки a и значение эффективной массы m_{eff} в центре зоны Бриллюэна (частота ω_0 должна быть выражена через эти параметры). Построить соответствующий график.

плотность состояний

Плотность состояний $\rho(\omega)$:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{V}\sum_n \delta(\omega - \omega_n) = \frac{1}{V}\frac{dN}{d\omega},$$

где n обозначает совокупность квантовых чисел, характеризующих стационарное состояние с энергией E_n, $\omega_n = E_n/\hbar$, $V = L^D$ - объем системы, L и D - соответственно ее линейный размер и размерность ($D = 1, 2, 3$), dN - число квантовых состояний в интервале частот $d\omega$. В $\mathbf{k}$-пространстве на каждое квантовое состояние приходится объем $(2\pi/L)^D$. Формулы для расчета плотности состояний при изотропном законе дисперсии $\omega = \omega(|\mathbf{k}|) \equiv \omega(k)$ приведены в таблице, где k и $dk/d\omega = 1/v_g$ ($v_g = d\omega/dk$ - групповая скорость) должны быть найдены как функции частоты из явного выражения для зависимости $\omega(k)$ (закон дисперсии предполагается изотропным во всех задачах).

$$\rho(\omega) = \frac{1}{V}\frac{dN}{dk}\frac{dk}{d\omega}$$

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
фононы	$\frac{1}{\pi}\frac{dk}{d\omega}$	$\frac{1}{2\pi}k\frac{dk}{d\omega}$	$\frac{1}{2\pi^2}k^2\frac{dk}{d\omega}$
электроны	$\frac{2}{\pi}\frac{dk}{d\omega}$	$\frac{1}{\pi}k\frac{dk}{d\omega}$	$\frac{1}{\pi^2}k^2\frac{dk}{d\omega}$

эффективная масса

Для произвольного закона дисперсии $\omega(k)$, имеющего экстремум в точке $k = k_0$ эффективная масса в точке k_0 определяется соотношением:

$$m_{eff} \equiv \hbar\left(\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k=k_0}\right)^{-1}$$

При решении задач удобнее находить эффективную массу, разлагая функцию $\omega(k)$ в ряд в точке $k = k_0$:

$$\omega = \omega(k_0) + A(k - k_0)^2 + \ldots$$

и выражая m_{eff} через коэффициент A: $m_{eff} = \frac{\hbar}{2A}$.